Math Un. 72

Mathesis. Systemata et methodi ord: chronol: 147.

R

# Lehrbuch

der

# Arithmetik, Geometrie

und

# ebenen Trigonometrie

zum Gebrauch

beym

Unterricht der Anfänger.

Von

Joach. Ernst Albr. Hildebrand.

Inspector der Königlichen Realschule zu Berlin.

---

## Erster Theil.

---

Berlin, 1793.

In der Königlichen Realschulbuchhandlung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Ehrfurchtsvoll zugeeignet

von dem

Verfasser.

# Vorrede.

Als ich das erste Mahl mit der Königlichen Realschule als Lehrer in Verbindung trat, wurde mir im Jahr 1777 von ihrem damaligen Director, dem Herrn Oberconsistorialrath Silberschlag, der Unterricht in der Arithmetik und Geometrie aufgetragen, und dabey das Reccardsche Lehrbuch empfohlen. Ich fand aber bald, daß es, was diese beyden Theile der Mathematik betrifft, seiner übrigen anerkannten Brauchbarkeit unbeschadet, bloß als Leitfaden angesehen werden könne; denn nicht zu gedenken, daß allenthalben selbst die nöthigsten Beweise fehlen —

ich hatte die vierte Auflage davon vor mir — ist manche nicht nur nützliche, sondern auch unentbehrliche Lehre, z. B. von den Decimalen bloß beyläufig berührt, andere z. B. die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen viel zu kurz abgehandelt, und noch andere, nemlich die Lehre von den Progressionen und Logarithmen ganz übergangen worden. Der Herr O. C. R. Silberschlag war gleicher Meynung und äußerte daher den Wunsch, daß ich mich an eine zweckmäßige Erweiterung und Ergänzung des im gedachten Lehrbuche enthaltenen Entwurfs machen möchte. Ich ergänzte also, aber bloß zu meinem eigenen Gebrauch, den Mangel der dem practischen Arithmetiker nützlichen, dem Mathematiker aber unentbehrlichen Lehre von den Decimalbrüchen, desgleichen von den Progressionen und Logarithmen, und erweiterte die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

Mir unbewußt, daß den bemerkten Mängeln dieses Lehrbuchs durch die Bemühung

des

des geschickten Professors der Mathematik zu Rostock, Herrn P. J. Hecker, in der 1783 besorgten sechsten Auflage desselben, die mir jetzt nach dem Abdruck des Bogens A a dieser Schrift zum ersten Mahl zu Gesichte kommt, schon nach Wunsch abgeholfen sey, entschloß ich mich im verflossnen Jahre die zur reinen Mathematik gehörigen Theile ganz und so auszuarbeiten, daß sich Anfänger, die sich in dieser Wissenschaft allenfalls selbst unterrichten wollen, oder auch solche, die ehemals aus irgend einem Grunde das Studium der Mathematik nicht genug geachtet, nun aber etwa als Privatlehrer andern darin Unterricht zu ertheilen aufgefordert werden, meiner Arbeit mit Nutzen bedienen könnten. Dieser Zweck wird auch die Weitläuftigkeit entschuldigen, womit ich die in diesem Lehrbuche vorgetragenen Materien abgehandelt habe.

Da die mathematische Evidenz auf Beweisen und Gründen beruhet, so habe ich nicht unterlassen, die letzten jedesmahl beyzubringen,

# Inhalt des ersten Theils.


## Einleitung.

§. 1. Begriff der Mathematik.
§. 2. Doppelte Art zur Erkenntniß der Größe eines Dinges zu gelangen.
§ 3. 4. Eintheilung der Größe.

## Erster Theil.

### Die Arithmetik.

### Erstes Kapitel.

#### Von den Zahlen überhaupt.

§. 1. Gegenstand der Arithmetik.
§. 2. Begriff der Zahl.
§. 3. 4. 5. Eintheilung der Zahlen in ganze und gebrochene, benannte und unbenannte, gleichartige und ungleichartige.
§. 6. Doppelter Werth der Ziefern.
§. 7. Begriff der Null.
§. 8. Begriff des Numerirens.
§. 9. Die Veränderungen der Zahlen bestehen entweder in Vermehrung oder Verminderung derselben, jenes geschieht durchs Addiren und Multipliciren, dieses durchs Subtrahiren und Dividiren.
§. 10. Zeichen, wodurch die vier Rechnungsarten angedeutet werden.
§. 11. Die Zeichen der Gleichheit und Verschiedenheit.
§. 12. Anstatt der Ziefern kann man auch die kleinen lateinischen Buchstaben brauchen.

### Zweytes Kapitel.

#### Allgemeine Grundsätze der Arithmetik.

# Inhalt.

## Drittes Kapitel.

### Die vier Rechnungsarten in Zahlen.

I. In unbenannten Zahlen.

A. In ganzen Zahlen.

#### 1. Das Addiren.

1. Begriff des Addirens.
2. Regeln und Beyspiele des Addirens.
3. Probe eines Additionsexempels.

#### 2. Das Subtrahiren.

4. Begriff des Subtrahirens.
5. Regeln und Beyspiele des Subtrahirens.
6. Probe der Subtraction.
7. Exempel zum Nachrechnen.

#### 3. Das Multipliciren.

8. Begriff des Multiplicirens.
9. Benennung der einzelnen Zahlen, die in einander multiplicirt werden, und dessen, was heraus kommt.
10. Das Einmahl Eins oder die Pythagoräische Rechentafel.
11. Drey verschiedene Fälle der Multiplication ganzer Zahlen.
12. Der erste Fall, wenn der Multiplicandus und Multiplicator einfache Zahlen sind.
13. 14. Der zweyte Fall. Wenn der eine Factor eine einfache, der andere eine zusammengesetzte Zahl ist.
15. Der dritte Fall. Wenn beyde Factoren zusammengesetzte Zahlen sind.
16. 17. Wie es in Ansehung der Nullen zu halten.
18. 19. Das Multipliciren vermittelst der Nepperschen Stäbchen.
20. Wie man auf eine andere Art ohne Ein mahl Eins multipliciren kann.
21. Probe der Multiplication.

22. Wie man die Multiplication vielgliedriger Factoren andeutet.
23. Wie man multiplicirt und subtrahirt zugleich.
24. Einige Exempel zum Nachrechnen.
25. Einige Vortheile beym Multipliciren.
1. Wenn die erste oder letzte Ziefer des Multiplicators 1 ist.
26. 2. Wenn man sich gewöhnt mit Zahlen, die aus zwey Ziefern bestehen, zu multipliciren.
27. 3. Wenn man den einen Factor in andere Factoren resolvirt.
a. Wenn der eine Factor wirklich ein Factum aus andern bequemen Factoren ist.
28. b. Wenn der Multiplicator nahe an eine Zahl grenzt, die sich bequem in Factoren resolviren läßt.
α. Wenn der Multiplicator größer ist, als die dafür gewählte Zahl.
29. β. Wenn der gegebene Multiplicator kleiner ist.
30. 4. Wenn man den Multiplicator in solche Theile zerfällt, die ein gewisses Verhältniß gegen einander haben.

4. Das Dividiren.

31. Begriff des Dividirens, und Benennung der Zahlen, die beym Dividiren vorkommen.
32. Verschiedene Fälle der Division ganzer Zahlen.
1. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ist.
a. Wenn der ganze Dividendus in der Pythagoräischen Tafel stehet.
33. b. Wenn der gegebene Dividendus zwar nicht in der Pythagoräischen Tafel zu finden, aber nur etwas größer ist, als ein Product in der Reihe des Divisors.

34. c. Wenn der Dividendus aus mehr als zwey Ziefern besteht.
35. 2. Wenn Divisor und Dividendus zusammengesetzte Zahlen sind.
36. Wie man auch ohne Ein mahl Eins dividiren könne.
37. Eine andere Art zu dividiren.
38. 39. Noch eine andere Art zu dividiren.
40. Wie es in Ansehung der Nullen am Ende des Dividendus und Divisors zu halten.
41. Der Divisor geht nicht allemahl im Dividendus auf.
42. Probe der Division.
43. Exempel zum Nachrechnen.
44. 45. Vom vortheilhaften Dividiren.

## B. In gebrochnen Zahlen.

### 1. Ueberhaupt von den Brüchen.

46. Begriff eines Bruchs.
47. Bezeichnungsart eines Bruchs.
48. Eintheilung der Brüche in ächte und unächte.
49. Worauf der Werth eines Bruchs beruhe.
50. 51. Wie man einen Bruch vermehren und vermindern könne.
52. Regel fürs Vermehren und Vermindern eines Bruchs.
53. Ein Bruch behält seinen Werth, wenn beyde Theile in einerley Zahl multiplicirt oder durch einerley Zahl dividirt werden.
54. 55. Verwandlung der Brüche in andere von gleichem Werth.
56. Das sogenannte Heben oder Abbreviiren der Brüche.
57. Das Einrichten der Brüche.

## 2. Die vier Rechnungsarten in Brüchen.

### 1. Das Addiren.

58. Wenn die Brüche einerley Nenner haben.
59—61. Wenn die Nenuer der Brüche verschieden sind.

### 2. Das Subtrahiren.

62. 63. Wenn die Brüche einerley Nenner haben.
64. 65. Wenn die Brüche verschiedene Nenner haben.

### 3. Das Multipliciren.

66. Wenn beyde Factoren ächte Brüche sind.
67. Wenn der eine Factor ein ächter Bruch, der andere aber eine ganze Zahl ist.
68. Wenn einer der beyden Factoren eine vermischte Zahl ist.
69. Wenn mehr als ein Factor in einander multiplicirt werden soll.

### 4. Das Dividiren.

70. Wenn der Dividendus ein ächter Bruch, der Divisor aber eine ganze Zahl ist.
71. Wenn Divisor und Dividendus ächte Brüche sind.
a. Wenn die Nenner verschieden sind.
72. b. Wenn die Brüche einerley Nenner haben.
73. Wenn der Dividendus eine ganze Zahl, der Divisor aber ein ächter Bruch ist.
74. Wenn vermischte Zahlen durch ächte Brüche, ganze oder vermischte Zahlen sollen dividirt werden.

## II. Die vier Rechnungsarten in benannten Zahlen.

75. Was unter benannten Zahlen zu verstehn, und was in Ansehung derselben zu beobachten.

### 1. Das Addiren.

76. Regeln durch Beyspiele erläutert.

### 2. Das Subtrahiren.

77. Regeln durch Beyspiele erläutert.

3. Das Multipliciren.
78. Verfahren durch Beyspiele erläutert.
79—84. Vortheile beym Multipliciren.

4. Das Dividiren.
85. Auf lange Art.
86. 87. Auf kurze Art.
88. Wenn der Divisor ein ächter Bruch ist.
89. Wenn der Divisor eine vermischte Zahl ist.
90. Wenn der Divisor aus mehrern Benennungen besteht.

Viertes Kapitel.
Von den Decimalbrüchen.

1. Begriff eines Decimalbruchs.
2. 3. Werth der Ziefern eines Decimalbruchs.
4. Kennzeichen eines Decimalbruchs.
5. 1. Verwandelung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.
a. Eines ächten Bruchs in einen Decimalbruch.
6. b. Eines unächten Bruchs in einen Decimalbruch.
7. 2. Verwandelung der Decimalbrüche mit verschiedenen Nennern in andere mit gleichen Nennern von demselben Werth.
3. Die vier Rechnungsarten.
8. 9. a. Das Addiren.
10. b. Das Subtrahiren.
11. 12. c. Das Multipliciren.
d. Das Dividiren.
13. Wenn der Dividendus und Divisor aus gleichviel Decimalstellen bestehen.
14. Wenn der Dividendus mehr Decimalstellen enthält, als der Divisor.
15. Wenn der Divisor mehr Decimalstellen enthält, als der Dividendus.

Fünf-

## Fünftes Kapitel.

### Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Größen.

1. Jeder Buchstabe behält dieselbe Bedeutung durchs ganze Exempel.
2. Die Größen sind entweder positiv oder negativ.
3. Was man unter Coefficient zu verstehen habe.

1. Das Addiren.

4. Wenn die zu addirenden Größen einerley Zeichen haben.
5. Wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben.

2. Das Subtrahiren.

6. Verschiedene Fälle beym Subtrahiren.
7—10. Wenn die Größen einerley Zeichen haben.
11—14. Wenn sie verschiedene Zeichen haben.
15. Allgemeine Regel für alle Subtractionsfälle.
16. Recapitulation aller sieben Fälle.

3. Das Multipliciren.

17. Wie allgemeine Größen überhaupt multiplicirt werden.
18. Verschiedene Fälle beym Multipliciren.
19. 1. Wenn beyde Factoren positiv sind.
20. 2. Wenn der eine Factor positiv, der andere negativ ist.
21. 3. Wenn beyde Factoren negativ sind.
22. Allgemeine Regel für alle drey Multiplicationsfälle.
23. Wenn die Factoren aus vielgliedrigen Größen bestehen.
24. Was in Ansehung eines gemeinschaftlichen Factors vielgliedriger Producte zu beobachten.
25. Begriff einer Potenz, und wie Product und Potenz von einander unterschieden.
26. Bequeme Beziehungsart einer jeden Potenz.
27. Vom Exponenten der Dignität.
28. Multiplication gleichnahmiger Potenzen.
29. Multiplication ungleichnamiger Potenzen.

A. Das Ausziehen der Quadratwurzel.

13—17. Regel, wie man eine zweytheilige Wurzel zu finden.
18. 19. Regeln zu Suchung polynomischer Wurzeln.
20. Wie die Wurzel aus einer unvollständigen Quadratzahl zu ziehen.
21. Wie man bey Ausziehung der Wurzel aus einer mit einem Decimalbruch verbundenen Zahl zu verfahren habe.
22. Wie die Wurzel aus einem Decimalbruch zu ziehen.
23. Wie die Wurzel aus einem gemeinen Bruch zu ziehen.
24. Probe.
25. Die Quadratwurzel kann so wohl positiv als negativ seyn.

B. Das Ausziehen der Cubicwurzel.

26—31. Regel, wonach man sich beym Ausziehen binomischer Cubicwurzeln zu richten.
33. Regeln zu Ausziehung polynomischer Cubicwurzeln.
33. Wie die Cubicwurzel aus einer unvollkommnen Dignität zu ziehen.
34. Wie die Cubicwurzel aus einer Zahl mit angehängten Decimalbruch zu ziehen.
35. Wie man beym Ausziehen der Cubikwurzel aus einen Decimalbruch zu verfahren habe.
36. Wie die Cubikwurzel aus gemeinen Brüchen zu ziehen.
37. Probe.
38. Die Cubikwurzel läßt sich aus einer positiven und negativen Größe ziehen, und ist selbst positiv und negativ.

C. Das

C. Das Ausziehen der Biquadratwurzel.

39. Die Biquadratwurzel ist gleich der Quadratwurzel aus der Quadratwurzel einer Zahl.
40. Regeln, wonach die Biquadratwürzel auf einmahl zu finden.
41—42. Die Methode §. 39. verdient den Vorzug.
43. Die Formel §. 6. dient auch dazu, jede Wurzel aus jeder Potenz zu ziehen.
44. Lehrsatz. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.
45. Anwendung dieses Satzes.
46—48. Besondere Beyspiele.

## Siebentes Kapitel.

## Von den Verhältnissen und Proportionen.

### I.

### Von den Verhältnissen.

1. Was ein Verhältniß sey.
2. Eintheilung der Verhältnisse.

### A.

### Vom arithmetischen Verhältniß.

3. Absicht, weshalb zwey Größen in ein arithmetisches Verhältniß gebracht werden, und Bezeichnung eines solchen arithmetischen Verhältnisses.
4. Bey einem arithmetischen Verhältniß hat man auf drey Stücke zu sehen.
5. Zwey arithmetische Verhältnisse sind einander gleich, wenn beyde einem dritten gleich sind.

B.

## Vom geometrischen Verhältniß.

6. Wenn stehen zwey Größen in einem geometrischen Verhältniß, und wie wird dies angedeutet?
7. Was man unter dem Exponenten eines geometrischen Verhältnisses zu verstehen habe.
8. Auf wie viel Stücke man bey einem geometrischen Verhältniß zu sehen habe.
9. Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn beyde einem dritten gleich sind.
10. Beyde Glieder eines geometrischen Verhältnisses in einerley dritte Größe multiplicirt oder durch einerley Größe dividirt, hebt das Verhältniß nicht auf.
11. Die Summe der gleichnahmigen Glieder mehrerer geometrischen Verhältnisse verhalten sich wie die Glieder eines jeden dieser Verhältnisse. Eben dies gilt auch von den Differenzen gleichnahmiger Glieder mehrerer Verhältnisse.

II.

## Von den Proportionen.

12. 13. Wie entsteht und woraus besteht eine Proportion.

A.

### Von der arithmetischen Proportion.

14. Bezeichnung einer arithmetischen Proportion.
15. Aus den Vordergliedern zweyer Verhältnisse und der Differenz lassen sich auch die Hinterglieder bestimmen.
16. Die arithmetische Proportion ist entweder discret oder continuirlich.

17. Aus

17. Aus einem Gliede und der Differenz lassen sich auch die übrigen Glieder einer continuirlichen Proportion bestimmen.
18. Allgemeine Eigenschaft aller arithmetischen Proportionen.
19. 20. Verwechselungen der Glieder einer arithmetischen Proportion.
21. Aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion läßt sich das unbekannte vierte Glied bestimmen.
22. Was man unter der mittlern arithmetischen Proportionalgröße zu verstehen habe.

B.

Von der geometrischen Proportion.

23. 24. Wie entsteht und woraus besteht eine geometrische Proportion?
25. Zwey gleiche Brüche lassen sich in eine geometrische Proportion, und eine geometrische Proportion in zwey gleiche Brüche verwandeln.
26. Eine geometrische Proportion ist entweder eine discrete oder continuirliche.
27. Allgemeine Eigenschaft beyder Arten.
28—36. Veränderungen, die man mit einer geometrischen Proportion, ohne sie aufzuheben, vornehmen kann.
1. Durch Verwechselung der Glieder.
29. 2. Durch die Addition.
30. 3. Durch die Subtration.
31. 4. Durch die Multiplication.
32. 5. Durch die Division.
33. Die Producte aus den gleichnahmigen Gliedern mehrerer geometrischer Proportionen machen eine neue Proportion.

34. 6. Veränderung durch Erhebung der Glieder zu Potenzen.
35. 7. Durch Ausziehung der Wurzeln.
37. Wie die Brüche aus einer Proportion wegzuschaffen.
38. Wie die großen Zahlen eines Verhältnisses in kleinere zu verwandeln.
39. Wie das Wurzelzeichen aus einer Proportion wegzuschaffen.
40—44. Von zusammengesetzten Verhältnissen.
45—52. Vergleichung zweyer Proportionen mit einander.
53. Das vierte Glied einer geometrischen Proportion ist gleich dem Product der beyden mittlern Glieder dividirt durchs erste.
54. Auf welche Art jedes fehlende Glied aus den drey gegebenen Gliedern zu bestimmen.
55. Das mittlere Glied einer continuirlichen geometrischen Proportion ist gleich der Wurzel aus den beyden äußern Gliedern.
56. Drey Aufgaben, und was man unter der mittlern geometrischen Proportionalgröße zu verstehen habe.

## Achtes Kapitel.

## Die Regel Detri.

1. Was man unter der Regel Detri zu verstehen habe.
2. Worauf sich diese Regel gründe.
3. Worin diese Regel bestehe.
4. Was man zu thun hat, wenn die einzelnen Glieder aus verschiedenen Einheiten bestehen.
5. Von den Vortheilen, die bey der Berechnung der Aufgaben dieser Regel statt finden.
6. Eintheilung der Regel Detri.

## I.

## Die einfache Regel Detri.

### A.

### Die directe Regel Detri.

7. Wenn das erste Glied aus 1 mit derjenigen Benennung besteht, welche auch im zweyten Gliede vorkommt.
8. Wenn das zweyte und dritte Glied aus 1 besteht.
9. Wenn in jedem Gliede mehr Einheiten von einer oder auch von verschiedenen Ordnungen vorkommen.
10. Wenn Brüche in einem Regel Detri Exempel vorkommen.
1. Wenn die Brüche nicht mit ganzen Zahlen verbunden sind.
11. 2. Wenn die Brüche ganzen Zahlen angehängt sind.
12. Wenn ein und das andere Glied oder alle drey Glieder verschiedene Benennungen haben.
13. Von der Probe eines Regel Detri Exempels.

### B.

### Die umgekehrte Regel Detri.

14. 15. Was es mit der umgekehrten Regel Detri für eine Bewandniß habe.
16. Kennzeichen eines Exempels der umgekehrten Regel Detri.
17. Berechnung eines Exempels der umgekehrten Regel Detri.

## II.

### Die zusammengesetzte Regel Detri.

18. Was man unter der zusammengesetzten Regel Detri zu verstehen habe.

# Inhalt.


## A.

### Die Regel Quinque.

19. Welche Aufgaben nach der Regel Quinque zu berechnen.
20. Wie man dabey zu verfahren.
21. Eintheilung in die directe und umgekehrte Regel Quinque.
22. 1. Die directe Regel Quinque.
23. 2. Die umgekehrte Regel Quinque.

## B.

### Die Regel Multiplex.

24. 1. Die directe Regel Multiplex.
25. 2. Die umgekehrte Regel Multiplex.

## C.

### Die Kettenregel.

26. Unterschied zwischen der Regel Multiplex und der Kettenregel.
27. Wie man bey Anfertigung des Aufsatzes zu verfahren.
28. Berechnung.
29. Nutzen dieser Regel.

## D.

### Die Theilungsrechnung.

30. Was die Theilungsrechnung sey.
31. Bey welchen Vorfällen sie anzuwenden.
32. Allgemeine Regel.
33. I. Exempel der Gesellschaftsrechnung.
    a. der einfachen Gesellschaftsrechnung.

34. Berechnung eines Exempels, wo eine Größe vermittelst des so genannten Schlüssels in 24 Theile zu theilen.
35. b. Doppelte Gesellschaftsrechnung.
36. II. Die Erbtheilungsrechnung.
a. Wenn eines jeden Theil nach einem gewissen Verhältniß deutlich bestimmt worden.
37. b. Wenn außer dem bestimmten verhältnißmäßigen Theil ein und der andere Erbe gewisser Ursachen halber eine benannte Summe vor den übrigen voraus haben, oder das bereits empfangene ihnen bey der Theilung angerechnet werden soll.
38. III. Die Compositions- und Alligationsrechnung.
1. Die Compositionsrechnung.
39. 2. Die Alligationsrechnung.
40. a. Wenn nur zwey Extreme gegeben sind.
41. b. Wenn mehr Extreme vorhanden sind.
42. Wenn die Exerema insgesammt beffer sind, als als das verlangte Medium.
IV. Die Regel Falsi.
43. Was die Regel Falsi sey, und wie die hieher gehörigen Rechnungsfälle zu behandeln.
44. 1. Die einfache Regel Falsi.
45. 2. Die doppelte Regel Falsi.
46. Eine andere Art der Berechnung.

## Neuntes Kapitel.

### Von den Progressionen und Logarithmen.

### I.

### Von den Progressionen.

1. Was man unter einer Progression zu verstehen habe.

## A.

## Von der arithmetischen Progression.

2. Entstehung einer arithmetischen Progression.
3. Sie ist entweder eine steigende oder fallende.
4. Drey unmittelbar auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Progression machen eine continuirliche arithmetische Proportion.
5. Jedes Glied einer arithmetischen Progression ist allemahl media arithmetice proportionalis zwischen dem nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Gliede.
6. Vier unmittelbar auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Progression machen eine discrete arithmetische Proportion.
7. Jedes Paar Glieder einer arithmetischen Progression, welche um gleichviel Glieder von einander abstehen, hat einerley arithmetisches Verhältniß.
8. Jedes auf das erste folgende Glied einer steigenden arithmetischen Progression besteht aus dem ersten Gliede und einer Anzahl Differenzen, welche der Zahl des Gliedes vom Anfange an gerechnet gleich ist weniger Eins.
9. Bey einer arithmetischen Progression hat man auf vier Stücke zu sehen.
10. Wie die Anzahl Glieder einer arithmetischen Progression zu bestimmen.
11. Wie die Differenz einer arithmetischen Progression zu bestimmen.
12. Wie das erste Glied einer arithmetischen Progression zu bestimmen.
13. Recapitulation.
14. Die Summen je zweyer von den Enden gleich weit entfernter Glieder sind einander gleich.

15. 16. Wie die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression zu bestimmen.

## B.

## Von der geometrischen Progression.

17. Entstehung einer geometrischen Progression.
18. Drey unmittelbar auf einander folgende Glieder einer geometr. Progression machen eine continuirliche Proportion.
19. Drey gleichweit von einander abstehende Glieder einer geom. Progr. machen eine continuirliche Proportion.
20. Vier unmittelbar auf einander folgende Glieder einer geom. Progression machen eine discrete geom. Proportion.
21. Jedes Paar Glieder einer geometrischen Progression, die gleich weit von einander abstehen, hat einerley geometrisches Verhältniß.
22. Die Dignität des Exponenten einer geom. Progression ist gleich der Zahl der Glieder weniger 1.
23. Die Producte je zweyer von den Enden gleichweit entfernter Glieder sind einander gleich.
24. Folge hieraus.
25. Ausdruck fürs letzte Glied einer geometrischen Progression.
26. Wie die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression zu berechnen.
27. Von unendlichen geometrischen Reihen.
28. Wie die Summe einer unendlich fallenden Reihe, deren Glieder positiv sind, zu berechnen.
29. Wie die Summe einer unendlich fallenden Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, zu berechnen.

30. 31. Vom Nutzen unendlicher Reihen.

II.

Von den Logarithmen.

32. 33. Was man unter Logarithmen zu verstehen.
34. Uebereinstimmung der Potenzen der Exponenten einer geom. Reihe mit den Gliedern einer arithm. Reihe deren erstes Glied = 0 und die Differenz = 1.
35. Vortheile, welche die Logarithmen im Rechnen gewähren.
36. Die Logarithmen in geometrischer Proportion stehender Zahlen stehen in einer arithm. Proportion.
37. Wie man das vierte Glied einer geometrischen Proportion vermittelst der Logarithmen findet.
38. Der Log. eines Products ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren.
39. Der Logarithme einer Quadratzahl ist gleich dem doppelten Logarithmus der Wurzel.
40. Der Logarithme der Quadratwurzel ist gleich dem halben Logarithmus des Quadrats.
41. Der Logarithmus einer Cubiczahl ist gleich dem dreyfachen Logarithmus der Wurzel.
42. Der Logarithmus der Cubicwurzel ist gleich dem dritten Theil vom Logarithmus der Cubiczahl.
43. Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividendus weniger dem Log. des Divisors.
44. Der Logarithmus eines Bruchs ist gleich dem Log. des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.
45. Vom Briggischen Logarithmensystem.
46. Berechnung des Logarithmen der Zahl 2.
47—48. Die Logarithmen der meisten Zahlen lassen sich auf eine minder mühsame Art finden.

49. Von der Karakteristik eines Logarithmen.
50. Zahlen, die ein Factum sind aus 10 oder einer Potenz von 10 haben in Ansehung der Decimalstellen mit der einfachen Zahl denselben Logarithmus.
51. Eben so verhält sichs mit den Zahlen, die durch die Division von 10 oder eine Potenz von 10 entstanden sind.
52. Die Logarithmen aller Zahlen sind nicht berechnet.
53—60. Aufgaben.
1. Den Log. einer Zahl zu finden, die nicht in den den Tafeln steht.
a. Wenn sich die Zahl in solche Factoren resolviren läßt, deren Logarithmen in den Tafeln stehn.
55. b. Wenn sich die Zahl nicht in solche Factores resolviren läßt.
56. 2. Den Logarithmus einer vermischten Zahl zu finden.
a. Wenn an der ganzen Zahl ein Decimalbruch angehängt ist.
57. b. Wenn die vermischte Zahl aus einer ganzen Zahl und einem gemeinen Bruch besteht.
58. Die Zahl zu einem Logarithmus zu finden, der nicht in den Tafeln steht.
a. Wenn der gegebene Logarithmus bloß in Ansehung der Characteristik von den Logarithmen in den Tafeln abweicht.
59. b. Wenn die Decimalbrüche des gegebenen Logarithmen nicht in den Tafeln stehen.
60. c. Die Zahl zu einen gegeben negativen Log. zu finden.

## Zehntes Kapitel.

### Von den algebraischen Gleichungen.

1. Was eine Gleichung sey.
2. Bezeichnung der bekannten und unbekannten Größen.

3. Wor-

# Inhalt.

3. Worauf es hauptsächlich bey den Gleichungen ankomme.
4. Veränderungen, wodurch die Fundamentalgleichung aufgelöset wird.
5. Eintheilung der algebraischen Gleichungen.

I.

Die Gleichungen vom ersten Grade.

6—17. Wenn nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe enthalten ist.
18—27. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in der Aufgabe enthalten ist.

II.

Die Gleichungen vom zweyten Grade.

28. Diese sind entweder reine oder unreine quadratische Gleichungen.
29. Allgemeine Regel bey Anfertigung der Fundamentalgleichung.
30—38. A. Von den reinen quadratischen Gleichungen.
39—57. B. Von den unreinen quadratischen Gleich.
52—57. Von unbestimmten Aufgaben, oder der sogenannten Regel Coeci.

# Einleitung
## in
# die reine Mathematik.

1.

Die Mathematik ist, in der einmahl angenommenen Bedeutung dieses Worts, die Wissenschaft der Größe, d. i. derjenigen Eigenschaft der Dinge, vermöge welcher sie sich vermehren und vermindern lassen, und der Mittel, aus gewissen bekannten Größen durch Schlüsse andere unbekannte zu finden.

2.

Die Erkenntniß aber der Größe eines Dinges beruht entweder auf eine einzige unmittelbare Vorstellung derselben, oder auf Vergleichung mit einer andern schon bekannten Größe von eben der Art, die man zur Einheit angenommen hat. Im letzten Fall sagt man, man habe gemessen. Diese Vergleichung nun einer unbekannten Größe mit einer bekannten gleichartigen Größe, oder dieses Messen kann wieder auf eine doppelte Art geschehen. Entweder indem man die zum Maß angenommene Einheit bey einer unbekannten Größe wirklich so oft anbringt, als es sich thun läßt; oder durch bloße Vernunftschlüße, und dies letztere ist denn eigentlich der Gegenstand der Mathematik.

### Anmerkung.

Im gemeinen Leben bedient man sich des Ausdrucks Messen gewöhnlich nur bey Bestimmung der Menge flüssiger und trockner Körper, der Längen und Räume; in der Mathematik aber begreift dieser Ausdruck mehr, so daß er jede Art der Vergleichung zweyer oder mehrerer Größen von einerley Art bezeichnet.

3.

Man betrachtet aber die Größe entweder überhaupt an und vor sich, oder so, wie sie sich wirklich an natürlichen Dingen befindet. Jenes geschieht in der so genannten reinen (mathesis pura), dieses in der angewandten Mathematik (m. applicata).

4.

Man kann aber auch die Größe betrachten, entweder, als den Inbegriff der Theile eines zusammenhängenden Ganzen, oder bloß als eine Menge von Theilen, die sich nicht in Verbindung mit einander befinden. Im letztern Fall nennt man sie eine unstetige Größe (quantitas discreta), und diese ist der Gegenstand der Arithmetik; im ersten Fall aber nennt man sie eine stetige Größe (q. continens), und damit beschäftigt sich die Geometrie ꝛc.

---

Erster

# Erster Theil.

# Die Arithmetik.

## Erstes Kapitel.

### Von den Zahlen überhaupt.

1.

Die Arithmetik betrachtet die Natur und Eigenschaften der unstetigen Größen, d. i. solcher Größen, die bloß in einer Menge von Theilen einerley Art bestehen, ohne daß diese Theile eben einander berühren, und lehret aus gewissen solchen gegebenen Größen andere unbekannte entdecken.

2.

Man pflegt auch eine solche unstetige Größe eine Zahl (numerus) zu nennen, die also nichts anders ist, als ein Inbegriff mehrerer Dinge von einerley Art. Jedes solches einzelne Ding aber heißt die Einheit. Man kann folglich auch sagen, die Zahl ist nichts anders, als eine Summe mehrerer Einheiten.

3.

Setzt man die Einheit etliche Mahl völlig zu sich selbst, so entsteht eine ganze Zahl (n. integer); nimmt man aber nur einen oder mehrere Theile der Einheit, so hat man eine gebrochne Zahl oder einen Bruch (n. fractus, fractio).

4.

Die Zahlen (es mögen nun ganze Zahlen seyn oder Brüche) sind ferner entweder benannte, wenn man dabey anzeigt, was das für Dinge sind, die man zählet, oder unbenannte, wenn man bloß eine Menge von Einheiten durch eine gewisse Zahl ausdruckt.

5.

Die benannten Zahlen können nun wieder entweder gleichartige — homogene — oder ungleichartige — heterogene — Zahlen seyn, wovon sich jene auf einerley Sache oder Einheit beziehen, und also eine Aehnlichkeit mit einander haben; diese aber eine Menge Sachen von ganz verschiedener Art bezeichnen.

6.

Eine große Bequemlichkeit im Rechnen gewähren die bekannten neun Zahlzeichen oder Ziffern, die einen doppelten Werth haben, nämlich

1. Einen absoluten oder eigenthümlichen; und da bedeuten die Zeichen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Achte, Neune.
2. Einen localen Werth, der von der Stelle abhängt, den eine Ziffer in einer aus mehrern Zahlzeichen bestehenden, oder in einer zusammengesetzten Zahl einnimmt, von der rechten Hand gegen die linke gerechnet. Jede Ziffer hat nämlich in der Stelle rechter Hand den einfachen oder ihren absoluten Werth.
In der zweyten Stelle ihren zehnfachen,
in der dritten Stelle ihren zehen mahl zehn-, oder hundertfachen,

in

in der vierten Stelle ihren zehen mahl hundert- oder tausendfachen,
in der fünften Stelle ihren zehen mahl tausend- oder zehentausendfachen Werth u. s. w.

7.

Außer diesen neun Ziffern oder bedeutenden Zahlzeichen giebts noch ein Zeichen, welches bloß dient, die Stelle auszufüllen, wo keine bedeutende Ziffer zu stehen kommt. Dies ist das Zeichen o (Null). Diese Null bedeutet für sich allein nichts, und ist also eigentlich keine Ziffer, sondern bezeichnet bloß die Abwesenheit einer von jenen neun Ziffern.

8.

Weiß man nun, daß nach §. 6 die Zahl Zehen zwey Stellen, Hundert drey Stellen, Tausend vier, und Zehen tausend fünf Stellen u. s. w. erfordert: so kann man auch leicht jede in Worten ausgedruckte Zahl durch die bekannten Zahlzeichen schreiben, und umgekehrt iede in Zeichen ausgedruckte Zahl aussprechen oder lesen, welches man numeriren zu nennen pflegt. So füllt z. B. die Zahl Achtzig und Sieben oder, wie man gewöhnlicher zu sagen pflegt, Sieben und achtzig tausend und fünf und sechzig — fünf Stellen aus.

In die fünfte Stelle kommt die 8, und bedeutet 80000,
in die vierte Stelle kommt die 7, und bedeutet 7000,
in die dritte Stelle kommen die Hunderte (§ 6), weil aber keine Hunderte ausgesprochen sind, oder weil die ganze Zahl keine besondern Hunderte enthält, so wird die dritte Stelle mit o ausgefüllt;
in die zweite Stelle kommt die 6, und bedeutet 60,

in die erste Stelle kommt die 5, und bedeutet bloß 5; daß also die Zahl so aussieht: 87065.

Sollte man folgende Zahl

| | | | | | b | | | | | | m | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 4 | 2 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| Einheiten | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Zehner | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hundert | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Tausend | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Zehnt. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hundertt. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Einer | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Zehner | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hundert | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Tausend | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Zehnt. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hundertt. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Einer | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Zehner | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hundert | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Tausend | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Zehnt. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Hundertt. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | von Billionen. | | | | | von Millionen. | | | | | | |

lesen, so darf man nur die Zahl in Klassen von drey Ziffern abtheilen, und allenfalls die dritte Ziffer jeder Klasse unten, die erste Ziffer aber jeder Klasse oben mit einem Punct, die siebente etwa mit m, die dreyzehnte mit b, die neunzehnte mit t u. s. w. bezeichnen, und dabey noch merken, daß die dritte und vierte Klasse Millionen, die fünfte und sechste Klasse Billionen u. s. w. bedeutet; dann heißt die Zahl: Acht hundert und vier und sechzig tausend, zwey hundert und sieben und neunzig Billionen; fünf hundert und ein und dreyßig tausend, zwey hundert und sechs und vierzig Millionen; acht hundert und dreyzehn tausend, fünf hundert und neun und siebzig.

9.

Alle Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden können, bestehen entweder in einer Vermehrung oder Verminderung; jene wird durch Hinzusetzung, diese durch Hinwegnehmung gleichartiger

artiger Einheiten bewirkt. Jede dieser Veränderungen begreift wieder zwey besondere Arten; denn man kann eine Zahl

1. Vermehren
   a. Durch die Addition, wenn man eine oder mehrere andere gleichartige Zahlen hinzuthut.
   b. Durch die Multiplication, indem man eine gegebene Zahl mehrmahl nimmt oder zu sich selbst setzt.
2. Vermindern,
   a. Durch die Subtraction, indem man eine andere gleichartige einmahl davon nimmt.
   b. Durch die Division, wenn man von einer gegebenen Zahl eine andere so vielmahl wegnimmt, als es möglich ist.

10.

Auf die Anwendung dieser vierfachen Operationen gründet sich die ganze Rechenkunst; wobey zu merken, daß man, der Bequemlichkeit wegen, zu Bezeichnung einer jeden derselben ein besonderes willkührliches Zeichen angenommen hat.

So bedeutet das Zeichen (+) plus, daß die Größen oder Zahlen, zwischen welche es gesetzt wird, addirt werden sollen.

Durch das Zeichen (—) minus wird die Subtraction der Größe, vor welche es gesetzt wird, von einer andern Größe angezeigt.

Ein Punct oder ein Andreaskreuz ( × ), zwischen zwey oder mehrere Größen gesetzt, bedeutet, daß diese Größen in einander multiplicirt werden sollen.

Die Division endlich wird entweder durch ein Colon (:) bezeichnet, welches zwischen die zu thei-

lende Größe und den Theiler gesetzt wird; oder indem man den Theiler unter die zu theilende Größe schreibt, und beyde durch ein kleines horizontales Strichlein trennt. So bedeutet z. B. 15 : 3 oder $\frac{15}{3}$, daß 15 durch 3 dividirt werden soll.

11.

Außer diesen muß man noch folgende zwey Zeichen merken:

1. Daß zwey Größen einander gleich sind, wird durch das Gleichheitszeichen (=) angezeigt, welches zwischen diese Größen gesetzt wird. So bedeutet $8 = 2 . 4$, daß 8 so groß oder gleich sey dem Product aus 2 in 4.
2. Daß eine Zahl größer oder kleiner sey, als eine andere, wird durch $>$ oder $<$ angezeigt, so daß die Spitze allemahl gegen die kleinere Größe gerichtet wird. So bedeutet $8 > 5 + 2$, daß 8 größer sey als die Summe aus 5 und 2, und 5 plus 2 kleiner als 8.

12.

Anstatt der Ziffern bedient man sich auch mit dem größten Vortheile der kleinen Lateinischen Buchstaben (doch auf eine andere Art, als gewöhnlich die Kaufleute zu thun pflegen, um einige ihrer Geheimnisse dadurch zu verbergen). Und weil diese noch allgemeinere Zeichen sind, als die Ziffern, so pflegt die Buchstabenrechnung die allgemeine Rechnung genannt zu werden. Die §. 10 angeführten willkührlichen Zeichen zu Bezeichnung der vier Rechnungsarten finden auch hier Statt, nur daß man beym Multipliciren auch ohne jene Zeichen die Größen bloß neben einander zu setzen pflegt, die in einander multiplicirt werden sollen. So bedeutet

$a + b$, daß diese beyden Größen addirt,
$a - b$, daß b von a abgezogen werden
$a \times b$ oder $a . b$ oder $ab$, daß a in b multiplicirt,
$a : b$ oder $\frac{a}{b}$, daß a durch b dividirt werden soll.

## Zweytes Kapitel.

### Allgemeine Grundsätze der Arithmetik.

1.

Jede Größe ist sich selbst gleich; daher kann, wenn es die Bequemlichkeit oder ein anderer Umstand erfordert, die eine für die andere gesetzt werden.

Der Sinn dieses Satzes ist nicht so wohl der, daß z. B. die Zahl 6 allemahl sechs bedeute, und also $6 = 6$, oder $a = a$ sey, denn das versteht sich von selbst; sondern daß auch Größen, wenn sie gleich durch verschiedene Zeichen ausgedruckt sind, doch einander gleich sind, wenn nur diese verschiedenen Zeichen einerley Größe ausdrucken. So ist $3 . 5$ eben so wohl 15, als $6 + 9$, folglich kann man auch füglich anstatt der Summe aus $6 + 9$ die Größe $3 . 5$ setzen, und umgekehrt.

2.

Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich. Hieraus folgt unmittelbar

1. Jeder Theil des Ganzen, oder auch einige Theile desselben sind allemahl kleiner, als das Ganze.
2. Das Ganze aber ist umgekehrt allemahl größer, als einer oder einige seiner Theile.

Z. B. Ein Gulden hält 16 Groschen. Es ist folglich

1 fl. = 16 gr.

und 1 oder 2 oder 3 bis 15 gr. < 1 fl.

und 1 ſt. > 1 oder 2 oder 3 bis 15 gr.
Oder wenn A aus den Theilen b und c beſteht; ſo iſt

$$A = b + c$$
$$b < A$$
$$c < A$$
$$A > b$$
$$A > c$$

3.

Zwey Größen ſind einander gleich, wenn jede derſelben einer dritten Größe gleich iſt.

Man kann ſich dieſe dritte Größe als das gemeinſchaftliche Maaß der beyden andern vorſtellen. Haben nun aber zwey Größen einerley Maß, ſo müſſen ſie nothwendig einander gleich ſeyn.

| | |
|---|---|
| Wenn $2 \cdot 4 = 8$ | Oder wenn $a = b$ |
| und $\frac{24}{3} = 8$ | und auch $c = b$ |
| ſo iſt auch $2 \cdot 4 = \frac{24}{3}$ | ſo iſt auch $a = c$ |

4.

Iſt aber eine dritte Größe größer als die eine von zwey gleichen Größen, ſo iſt ſie auch größer, als die andere.

| | |
|---|---|
| Wenn $2 \cdot 4 = 8$ | Oder wenn $a = b$ |
| und $3 \cdot 3 > 8$ | und $c > b$ |
| ſo iſt auch $3 \cdot 3 > 2 \cdot 4$ | ſo iſt auch $c > a$ |

5.

Umgekehrt, wenn eine dritte Größe kleiner als die eine von zwey gleichen Größen, ſo iſt ſie auch kleiner als die andere.

| | |
|---|---|
| Wenn $2 \cdot 4 = 8$ | Oder wenn $a = b$ |
| und $3 < 8$ | und $m < a$ |
| ſo iſt auch $3 < 2 \cdot 4$ | ſo iſt auch $m < b$ |

6.

6.

Gleiche Größen zu gleichen addirt giebt gleiche Summen.

Wenn $2 . 4 = 8$ Oder wenn $a = b$

und $3 + 6 = 11 - 2$ und $c = c$

so ist auch $2.4+3+6=8+11-2$ so ist auch $a+c=b+c$

7.

Ungleiche Größen zu gleichen addirt giebt ungleiche Summen.

Wenn $2.4=8$ Oder wenn $a=b$

$6 > 5$ $m < n$

so ist auch $2.4+6>8+5$ $a+m<b+n$

8.

Gleiche Größen von gleichen abgezogen giebt gleiche Reste oder Differenzen.

Wenn $3.5=12+3$ Oder $a=b$

$2.4=8$ $c=c$

so ist $3.5-(2.4)=12+3-8$ $a-c=b-c$

9.

Gleiche Größen von ungleichen oder ungleiche Größen von gleichen abgezogen, giebt ungleiche Reste oder Differenzen.

Wenn $2.4<10$ Oder $a>b$

$5=3+2$ $c=c$

so ist $(2.4)-5<10-(3+2.)$ $a-c>b-c.$

Oder wenn $2.4=6+2$ Oder $a=b$

$4<6$ $c>d$

so ist $(2.4)-4>6+2-6$ $a-c<b-d.$

10.

Wird eine Größe von der Summe aus dieser Größe und einer andern abgezogen, so ist die Differenz

ferenz gleich der andern Größe; oder die Subtraction einer Größe hebt die Addition derselben zu einer andern Größe auf.

So ist $4+8-4=8$. Oder $a+b-b=a$.

11.

Wenn man eine Größe von einer andern subtrahirt, zum Rest aber die erstere wieder addirt, so ist die Summe gleich der andern Größe; oder die Addition einer Größe hebt den Unterschied zwischen dieser Größe und einer andern wieder auf.

So ist $16-4+4=16$. Oder $a-b+b=a$.

12.

Gleiche Größen in gleiche multiplicirt giebt gleiche Producte; oder wenn zwey gleiche Größen in eine dritte multiplicirt werden, so verhalten sich die Producte wie die multiplicirten Größen, das heißt, die Producte sind auch gleich.

$$\begin{array}{r} 2.4=8 \\ 3=3 \\ \hline \text{F. } 2.4.3=8.3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Oder } a=b \\ m=m \\ \hline \text{F. } am=bm \end{array}$$

13.

Gleiche Größen in ungleiche multiplicirt giebt ungleiche Producte.

$$\begin{array}{r} 2.4=8 \\ 3<4 \\ \hline \text{F. } 2.4.3<8.4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Oder } a=b \\ 6>5 \\ \hline \text{F. } 6a>5b \end{array}$$

14.

Multiplicirt man zwey ungleiche Größen in eine dritte, so verhalten sich die Producte wie die multiplicirten Größen, das heißt, die Producte sind auch ungleich, so, daß das größere Product das kleinere eben so oft in sich faßt, als der größere Factor den kleinern.

$2 < 8$
$3 = 3$
$\overline{\text{F. } 6 < 24}$

Da nun $2:8 = 1:4$
so ist auch $6:24 = 1:4$.

Oder $4m > 2m$
$3n = 3n$
$\overline{\text{F. } 12mn > 6mn}$

Da nun $4m:2m = 2:1$
so ist auch $12mn:6mn = 2:1$.

15.

Gleiches durch gleiches dividirt giebt gleiche Quotienten, oder dividirt man zwey gleiche Größen durch eine dritte, so verhalten sich die Quotienten wie die dividirten Größen, das heißt: die Quotiente sind auch gleich.

$4 . 6 = 24$
$3 = 3$
$\overline{\text{F. } \frac{4.6}{3} = \frac{24}{3}}$
d. i. $8 = 8$.

Oder $a = b$
$c = c$
$\overline{\text{F. } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}}$

16.

Gleiche Größen durch ungleiche dividirt giebt ungleiche Quottenten.

$16 + 8 = 24$
$3 < 4$
$\overline{\text{F. } \frac{16+8}{3} > \frac{24}{4}}$

Oder $a = b$
$8 > 4$
$\overline{\text{F. } \frac{a}{8} < \frac{b}{6}}$

17.

Dividirt man zwey ungleiche Größen durch eine dritte, so verhalten sich die Quotienten wie die dividirten Größen; das heißt: die Quotienten sind auch ungleich, so, daß der größre Quotient den kleinern eben so vielmahl enthält, als der größere Dividendus den kleinern.

$$\frac{8 < 16}{4 = 4}$$

Oder $m > n$
$p = p$

F. $2 < 4$

F. $\frac{m}{p} > \frac{n}{p}$

und $2 : 4 = 8 : 16$. Es ist aber $\frac{m}{p} : \frac{n}{p} = m : n$.

18.

Das Product zweyer Größen, durch die eine dividirt, giebt zum Quotienten die andere Größe, oder die Division durch eine Größe hebt die Multiplication in dieselbe Größe wieder auf.

$\frac{8 \cdot 16}{8} = 16$. oder $\frac{a\,b}{a} = b$.

19.

Wird der Quotient in den Theiler multiplicirt, so erscheint mit dem Product die getheilte Größe; oder multiplicirt man einen Bruch in seinen Nenner, so erhält man so viel Ganze, als der Zähler Einheiten hat.

$\frac{16}{8} \cdot 8 = 16$. Oder $\frac{b}{a} \cdot a = b$.

Oder $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

20.

Einerley Potenzen gleicher Wurzeln sind auch gleich.

F. $\frac{6 = 4+2}{6^2 = (4+2)^2}$ oder $\frac{a = b}{F.\ a^m = b^m}$.

$6^2 = 36$.

$(4+2)^2 = 4^2 + 2.4.2 + 2^2$

$= 16 + 16 + 4 = 36$.

21.

Einerley Wurzeln gleicher Größen sind auch gleich.

$6^2 = (4+2)^2$ oder $a^m = b^m$

$\sqrt[m]{6^2} = \sqrt[m]{(4+2)^2}$ $\sqrt[m]{a^m} = \sqrt[m]{b^m}$.

# Drittes Kapitel.

## Die vier Rechnungsarten in Zahlen.

### I. In unbenannten Zahlen.

#### A. In ganzen Zahlen.

##### 1. Das Addiren.

1.

Addiren heißt eine Zahl finden, die verschiedenen andern Zahlen oder verschiedenen einzelnen Posten gleich ist, oder deren Einheiten so viel betragen, als die Einheiten anderer gegebenen Zahlen zusammen ausmachen. Die gefundene Zahl heißt die Summe, das Aggregat oder Collect.

2.

Die Zahlen oder Größen, die addirt werden sollen, müssen nothwendig zu einerley Klasse gehören, d. i. man kann nicht Einheiten zu Zehnern u. s. w., sondern man muß Einheiten zu Einheiten, Zehner zu Zehnern u. s. w. addiren. Hieraus fließt in Ansehung zusammen gesetzter Zahlen — denn die Addition einfacher Zahlen hat gar keine Schwierigkeiten — folgende Regel, die sich aber bloß auf Bequemlichkeit gründet:

Man setze die zu addirenden Zahlen so unter einander, daß allemahl die Ziffern von einerley Klasse d. i., daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter

Zehner

Zehner u. s. w. unter einander zu stehen kommen. Dann ziehe man unter alle diese Posten eine Linie, um sie von der Summe, die unter die Linie zu stehen kommt, zu unterscheiden. Und nun macht man den Anfang zu addiren von den Einern und setzt die in der Summe enthaltenen Einer in die Stelle der Einer, die Zehner aber, wenn dergleichen in der Summe der Einer enthalten sind, addirt man zur Summe der folgenden Zehner, u. s. w.

Man habe z. B. folgende vier Zahlen in eine Summe zu bringen: 2345, 876, 73729 und 9804. Diese schreibt man folgendergestalt unter einander:

2345
876
73729
9804
---
86754

Man hat hier gesucht

1. die Summe der simpeln Einheiten, oder $5+6+9+4=24$, und hat die darin enthaltenen 4 Einer in die Stelle der Einer gesetzt; die 2 Zehner aber sind zur folgenden Klasse gerechnet worden.

2. Die Summe der Zehner, nämlich die Nr. 1 erhaltenen $2+4+7+2+0=15$, und hat die darin enthaltenen 5 Zehner in die Stelle der Zehner gesetzt, den 1 Hunderter aber zu den Hunderten der folgenden Klasse gerechnet.

3. Die Summe der Hunderte, nämlich die Nr. 2 erhaltene $1+3+8+7+8=27$, davon sind die 7 Hunderte in die Stelle der Hunderte gesetzt, die

die 2 Tausende aber sind zur folgenden Klasse gerechnet worden.

4. Die Summe der Tausende, nämlich die Nr. 3 erhaltene $2+2+3+9=16$, davon sind die 6 Tausende in die Stelle der Tausende gesetzt, die 1 aber als Zehen tausend ist zur folgenden Klasse gerechnet worden.

5. Die Summe der Zehen tausende, nämlich die Nr. 4 erhaltene $1+7=8$ nämlich Zehn tausende.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 362 | 629 | 6919 | 62955 | 327730 |
| 48 | 1258 | 27676 | 10591 | 52955 |
| 219 | 1887 | 676 | 42364 | 6919 |
| 629 | 3145 | 9228 | 84728 | 629 |
| | 6919 | 18456 | 127092 | 111767 |
| | | 62955 | 327730 | 500000 |

3.

Die sicherste Art, sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, ist, daß man die Zahlen noch einmahl und zwar in entgegen gesetzter Ordnung addirt, wodurch die Ziffern in eine andere Verbindung kommen.

Man hat zwar noch eine Probe, die sich am besten an einem besondern Exempel zeigen läßt.

| |
|---|
| 86174 |
| 35299 |
| 70286 |
| 191759. |

Man nimmt aus den zu summirenden Zahlen die Neunen heraus, und bemerkt, wie viel über diesen Neunen noch bleibt. Hier ist $4+7+1+6=$ zwey Neunen. $8+3+7=$ zwey Neunen. $6+8+2+2=$ zwey Neunen. Nun ist außer den beyden Ziffern der 9 noch 5 übrig.

In der Summe aber ist $7+1+1=9$ und überdem sind noch zwey Neunen vorhanden, und außer

wieder um 10, macht 16, und ziehe nun 9 ab von 16, so bleibt übrig 7 Zehner.

e. Die nach Nr. b zur 6 genommene 10 nehme man hier als 1 zur 0, macht 1, und ziehe 1 ab von 2, so bleibt übrig 1 Hunderter.

d. Und weil sich 9 von 5 nicht wegnehmen läßt, so vermehre man die obere 5 um 10, macht 15, und ziehe nun 9 ab von 15, so bleiben übrig 6 Tausende.

e. Die nach Nr. d zur obern 5 genommenen 10 setze man hier als 1 zur untern 5, macht 6, und ziehe 6 ab von 4, weil dies aber nicht angeht, so nehme man 10 zur 4, macht 14, und ziehe nun 6 ab von 14, so bleiben übrig 8 Zehen tausende.

f. Endlich nehme man die nach Nr. e zur 4 gezogenen 10 jetzt als 1 zur 7, macht 8, und ziehe 8 ab von 13, so bleiben übrig 5 Hundert tausende.

Anmerkung. So oft sich also die untere Ziffer von der obern nicht wegnehmen läßt, vermehre man die obere Ziffer um 10, vergesse aber nicht alsdann allemahl die folgende untere Ziefer des Subtrahendus um 1 zu vermehren.

6.

Ob man richtig gerechnet, davon kann man sich überzeugen, wenn man die gefundene Differenz und den Subtrahendus addirt; ist dann die erhaltene Summe gleich dem gegebenen Minuendus, so hat man richtig gerechnet.

| | |
|---|---|
| Min. | 13056080034 |
| Subtr. | 12959267382 |
| Rest. | 96812652 |

Summe 13056080034 = dem Minuendus.

Man

Man kann aber auch die erhaltene Differenz abziehen vom gegebenen Minuendus, da denn, wenn man richtig gerechnet hat, der Rest gleich seyn muß dem gegebenen Subtrahendus.

Min. 8406954306
Subtr. 2709983708
Differenz 5696970598

Neuer Rest 2709983708 = dem Subtrahendus.

7.

Noch einige Exempel zum Nachrechnen.

Man ziehe von der Zahl 2468097531086 42 ab 1) die Zahl 345678909876 54; 2) die Zahl 456789098765 43; 3) die Zahl 987654034567 89; 4) die Zahl 192939495969 79; 5) die Zahl 30583475733888. Nach Abzug der letzten Zahl muß übrig bleiben 1792012345678 9.

## 3. Das Multipliciren.

8.

Multipliciren heißt eine gegebene Zahl so vielmahl nehmen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

9.

Es müssen also zwey Zahlen gegeben seyn. Davon heißt die eine, welche zwey- oder mehrmahl zu sich selbst gesetzt werden soll, der Multiplicandus, die andere aber, welche anzeigt, wie oft dies geschehen soll, der Multiplicator, beyde zusammen aber heißen die Factores. Die Zahl endlich, welche gefunden wird, heißt das Factum, Product oder Multiplum.

## Anmerkung.

Man kann auch sagen: Multipliciren heißt eine Zahl finden, die aus dem einen Factor auf eben die Art entstanden ist, als der andere Factor aus der Einheit. Solchergestalt ist die Multiplication nichts anders, als eine widerholte Addition. So heißt z. B. die Zahl 6, 4mahl nehmen so viel, als eine Zahl finden, welche aus dem einen Factor 6 auf eben die Art entsteht, als der andere Factor 4 aus der Einheit. Es entsteht aber 4 aus der Einheit, indem man 1 viermahl zu sich selbst setzt; denn $1+1+1+1=4$; eben so oft, nämlich 4mahl, soll nun auch die Zahl 6 zu sich selbst gethan werden, dann ist $6+6+6+6=24$. Diese 24 enthält also wirklich die 6 eben so vielmahl, als die Zahl 4 die Einheit.

Man erhält aber auch dasselbe Product 24, wenn man die Zahl 4, 6mahl nimmt, das heißt, wenn man 4 eben so oft zu sich selbst setzt, als man die Einheit zu sich selbst setzen muß, um 6 zu erhalten. Man erhält aber 6 aus $1+1+1+1+1+1$; eben so oft muß nun auch 4 zu sich selbst gesetzt werden, dann erhält man mit der Summe aus $4+4+4+4+4+4$ das Product 24.

Man sieht zugleich hieraus, daß es gleich viel sey, welcher von beyden Factoren als der Multiplicandus, und welcher als der Multiplicater betrachtet wird.

## 10.

Die Multiplication der zusammen gesetzten Zahlen gründet sich auf die Multiplication der einfachen Zahlen,

Zahlen, denn erstere ist nichts anders, als eine Wiederholung der letzten. Man bringt daher für die Anfänger die Producte dieser einfachen Zahlen in eine Tabelle, die unter der Benennung der Pythagorischen Rechentafel oder des Ein mahl Eins bekannt ist, und die Anfängern allerdings gute Dienste leistet.

Bey ihrer Verfertigung kann man also verfahren: Man theilt ein hinlänglich großes Viereck in neun senkrechte Streifen, und jeden Streifen wieder in neun gleiche Fächer, so erhält man überhaupt 81 kleine Fächer. Dann setzt man in die oberste Reihe, oder in die neun Fächer

| | | |
|---|---|---|
| Der 1sten | horizontalen Reihe | die einfachen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung. |
| — 2ten | | das Doppelte der darüber stehenden Zahlen der ersten Reihe. |
| — 3ten | | die Summe der 2ten und 1sten Reihe. |
| — 4ten | | die S. der 3 und 1sten R. oder die doppelte zweyte Reihe. |
| — 5ten | | die S. der 4 und 1sten Reihe. |
| — 6ten | | die S. der 5 und 1sten R. oder die doppelte dritte Reihe. |
| — 7ten | | die Summe der 6ten und 1sten Reihe. |
| — 8ten | | die S. der 7 und 1sten R. oder die doppelte vierte Reihe. |
| — 9ten | | die Summe der 8ten und 1sten Reihe. |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

## Anmerkung.

Diese 64 oder eigentlich nur 36 verschiedenen Producte aller einfachen ganzen Zahlen müssen sich Anfänger so bekannt machen, daß sie ihnen eben so geschwind einfallen, als sie die Factoren selbst denken oder aussprechen.

11.

Es sind aber bey der Multiplication ganzer Zahlen drey verschiedene Fälle möglich. Denn es können

1. entweder beyde Factoren einfache Zahlen seyn.
2. Oder der eine Factor kann eine einfache, der andere eine zusammen gesetzte Zahl seyn.
3. Oder beyde Factoren können zusammen gesetzte Zahlen seyn.

12.

Der erste Fall, wenn so wohl der Multiplicandus als auch der Multiplicator eine einfache Zahl ist, bedarf keiner besondern Erläuterung, weil die Producte aller einfachen Zahlen in der Pythagorischen Rechentafel §. 10 enthalten sind.

Denn

Denn soll man z. B. 6 in 8 multipliciren, so findet man das Product in dem Fache, in welchem die sechste horizontale und achte vertikale Reihe, oder auch die achte horizontale und sechste vertikale Reihe zusammen laufen. In diesen beyden Fächern findet man die Zahl 48; es ist also das Product aus 6 mahl 8, oder aus 8 mahl 6 = 48.

13.

Der zweyte Fall war: Wenn der eine Factor eine einfache, der andere Factor eine zusammen gesetzte Zahl ist.

Man soll z. B. 246 in 8 multipliciren.

Es sey hier der Multiplicandus 246

der Multiplicator 8

Partialproducte { 48 / 32. / 16.. }

Product 1968

Man nehme

1. die 6 Einheiten 8 mahl, das machen 48 Einer, oder 8 Einer, welche in die Stelle der Einer, und 4 Zehner, die in die Stelle der Zehner gesetzt werden.
2. Die folgenden 4 Zehner 8 mahl, machen 32 Zehner, oder 2 Zehner, die in die Stelle der Zehner, und 3 Hunderte, die in die Stelle der Hunderte gesetzt werden.
3. Die folgenden 2 Hunderte 8 mahl, machen 16 Hunderte, oder 6 Hunderte, die in die Stelle der Hunderte, und 1 Tausender, der in die Stelle der Tause. de gesetzt wird.

Nun hat man nach der Anzahl der Ziffern im Multiplicandus auch drey Partialproducte erhalten. Addirt man nun diese drey Partialproducte, so daß die Ziffern einer jeden Klasse zusammen genommen werden, so erhält man 8 Einer, 2 + 4 d. i. 6 Zehner, 6 + 3 Hunderte d. i. 9 Hunderte, und 1 Tausender. Folglich ist das Hauptproduct 1968.

14.

Man sieht bald, daß man das Verfahren sehr hätte abkürzen können; denn man hätte nur die 4 Zehner nach Nr. 1 sogleich zu den 32 Zehnern nach Nr. 2 hinzu thun dürfen, dann hätte man 32 + 4 Zehner = 36 Zehner oder 6 Zehner und 3 Hunderte erhalten, davon hätte man die 6 Zehner in die Stelle der Zehner gesetzt, und die 3 Hunderte zum Product der folgenden Klasse gerechnet.

Das folgende Product der 2 Hunderte in 8 macht 16 Hunderte, und die vorhin erhaltenen 3 Hunderte dazu, machen 19 Hunderte, oder 9 Hunderte, die man in die Stelle der Hunderte, und 1 Tausender, den man in die Stelle der Tausende gesetzt hätte; dann hätte die Rechnung so ausgesehen:

| | |
|---|---|
| Multiplicandus | 246 |
| Multiplicator | 8 |
| Product | 1968 |
| | 3 4 |

Beweis.

Die Zahl 246 ist = 6 + 40 + 200, es muß also auch die Summe der Producte aus 6 in 8, aus 40 in 8 und aus 200 in 8 dem Product aus 246 in 8 gleich seyn. II § 12.

Nun

Nun aber ist 6, 40, 200 } 8 mahl genommen = { 48, 320, 1600

Folglich 246 in 8 multiplicirt = 1968.

15.

Der dritte Fall war: Wenn beyde Factoren aus zusammen gesetzten Zahlen bestehen.

Dieser Fall ist eine so oft wiederholte Anwendung des zweyten Falles, als der Multiplicator Ziffern enthält.

Man soll z. B. die Zahlen 72648 und 2345 in einander multipliciren.

Es sey der Multiplicandus 72648
so ist der Multiplicator 2345

Partialproducte { 363240, 290592., 217944.., 145296...

Hauptproduct 170359560

Man multiplicire den Multiplicandus

1. In die erste Ziffer 5 des Multiplicators, und setze das 5fache Product, nämlich 363240 Einer, unter die Linie so, daß die 0 in die Stelle der Einer zu stehen kommt.
2. In die zweyte Ziffer des Multiplicators, nämlich in 4 Zehner, und setze das 4fache Product oder 290592 Zehner unter das vorige Partialproduct so, daß die erste Ziffer 2 in die Stelle der Zehner zu stehen kommt.
3. In die dritte Ziffer des Multiplicators, nämlich in 3 Hunderte, und setze das 3fache Product oder 217944 Hunderte unter das zweyte Partialpro-

duct

diesen noch 5. Der Ueberschuß über die Neunen bey den zu addirenden Zahlen ist gleich dem Ueberschuß in der Summe, nämlich hier so wohl als dort 5; daraus schließt man nun, daß die gefundene Zahl die wahre Summe sey.

Daß aber diese Probe nicht zuverlässig sey, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man in diesem Exempel mit Fleiß den Fehler macht, und etwa 7 an die Stelle der 5 und umgekehrt setzt. Nun müßte nach dieser Probe die Zahl 191579 die wahre Summe seyn und ist es gleichwohl nicht.

## 2. Das Subtrahiren.

4.

Subtrahiren heißt eine Zahl oder Größe von einer andern gleichartigen einmahl wegnehmen, um zu sehen, wie viel die eine mehr beträgt, als die andere.

Die Zahl, von welcher eine andere abgezogen werden soll, heißt der Minuendus, die aber abgezogen wird, der Subtrahendus, und die, welche übrig bleibt, heißt der Rest oder die Differenz, weil sie anzeigt, um wie viel der Minuendus größer ist als der Subtrahendus.

5.

Auch hier gilt die Regel, daß man bey zusammen gesetzten Zahlen diejenigen Ziffern, die zu einerley Klasse gehören, unter einander setzt. Außerdem beobachtet man noch diese Ordnung, daß man den Subtrahendus unter den Minuendus zu setzen pflegt, welches aber nicht schlechterdings nothwendig ist.

1. Man soll die Zahl 345261 von der Zahl 759386 abziehen. Hier ist

der

der Minuendus 759386
der Subtrahendus 345261
Rest oder Differenz 414125

Man fängt rechter Hand bey der niedrigsten Klasse der Ziffern an und nimmt

a) 1 von 6, so bleibt übrig 5, welcher Rest unter die Linie in die Stelle der Einheiten gesetzt wird.
b) 6 von 8, der Rest 2 kommt in die Stelle der Zehner.
c) 2 von 3, der Rest 1 kommt in die Stelle der Hunderte.
d) 5 von 9, der Rest 4 kommt in die Stelle der Tausende.
e) 4 von 5, der Rest 1 kommt in die Stelle der Zehen tausende.
f) 3 von 7, der Rest 4 kommt in die Stelle der Hundert tausende.

2. Welches ist die Differenz zwischen den beyden Zahlen 1345261 und 759086?

Minuendus 1345261
Subtrahendus 759086
586175.

a. Weil sich 6 von 1 nicht wegnehmen läßt, so vermehre man die Ziffer des Minuendus, nämlich 1 gleich um 10, so hat man oben 11, und ziehe nun 6 ab von 11, so bleiben übrig 5 Einer.

b. Die nach Nr. a zur 1 genommene 10, nehme man nun als eine simple Einheit zur 8, so wird daraus 9, und ziehe 9 ab von 6, und weil dies nicht angeht, so vermehre man auch hier gleich die 6

wieder um 10, macht 16, und ziehe nun 9 ab von 16, so bleibt übrig 7 Zehner.

e. Die nach Nr. b zur 6 genommene 10 nehme man hier als 1 zur 0, macht 1, und ziehe 1 ab von 2, so bleibt übrig 1 Hunderter.

d. Und weil sich 9 von 5 nicht wegnehmen läßt, so vermehre man die obere 5 um 10, macht 15, und ziehe nun 9 ab von 15, so bleiben übrig 6 Tausende.

e. Die nach Nr. d zur obern 5 genommenen 10 setze man hier als 1 zur untern 5, macht 6, und ziehe 6 ab von 4, weil dies aber nicht angeht, so nehme man 10 zur 4, macht 14, und ziehe nun 6 ab von 14, so bleiben übrig 8 Zehen tausende.

f. Endlich nehme man die nach Nr. e zur 4 gezogenen 10 jetzt als 1 zur 7, macht 8, und ziehe 8 ab von 13, so bleiben übrig 5 Hundert tausende.

Anmerkung. So oft sich also die untere Ziffer von der obern nicht wegnehmen läßt, vermehre man die obere Ziffer um 10, vergesse aber nicht alsdann allemahl die folgende untere Zieser des Subtrahendus um 1 zu vermehren.

6.

Ob man richtig gerechnet, davon kann man sich überzeugen, wenn man die gefundene Differenz und den Subtrahendus addirt; ist dann die erhaltene Summe gleich dem gegebenen Minuendus, so hat man richtig gerechnet.

| | |
|---|---|
| Min. | 13056080034 |
| Subtr. | 1295926738 2 |
| Rest. | 96812652 |

Summe 13056080034 = dem Minuendus.

Man

Man kann aber auch die erhaltene Differenz abziehen vom gegebenen Minuendus, da denn, wenn man richtig gerechnet hat, der Rest gleich seyn muß dem gegebenen Subtrahendus.

Min. 8406954306
Subtr. 2709983708
Differenz 5696970598

Neuer Rest 2709983708 = dem Subtrahendus.

7.

Noch einige Exempel zum Nachrechnen.

Man ziehe von der Zahl 2468097531086 42 ab 1) die Zahl 345678909876 54; 2) die Zahl 456789098765 43; 3) die Zahl 987654034567 89; 4) die Zahl 192939495969 79; 5) die Zahl 30583475733888. Nach Abzug der letzten Zahl muß übrig bleiben 17920123456789.

## 3. Das Multipliciren.

8.

Multipliciren heißt eine gegebene Zahl so vielmahl nehmen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

9.

Es müssen also zwey Zahlen gegeben seyn. Davon heißt die eine, welche zwey- oder mehrmahl zu sich selbst gesetzt werden soll, der Multiplicandus, die andere aber, welche anzeigt, wie oft dies geschehen soll, der Multiplicator, beyde zusammen aber heißen die Factores. Die Zahl endlich, welche gefunden wird, heißt das Factum, Product oder Multiplum.

## Anmerkung.

Man kann auch sagen: Multipliciren heißt eine Zahl finden, die aus dem einen Factor auf eben die Art entstanden ist, als der andere Factor aus der Einheit. Solchergestalt ist die Multiplication nichts anders, als eine widerholte Addition. So heißt z. B. die Zahl 6, 4mahl nehmen so viel, als eine Zahl finden, welche aus dem einen Factor 6 auf eben die Art entsteht, als der andere Factor 4 aus der Einheit. Es entsteht aber 4 aus der Einheit, indem man 1 viermahl zu sich selbst setzt; denn $1+1+1+1=4$; eben so oft, nämlich 4mahl, soll nun auch die Zahl 6 zu sich selbst gethan werden, dann ist $6+6+6+6=24$. Diese 24 enthält also wirklich die 6 eben so vielmahl, als die Zahl 4 die Einheit.

Man erhält aber auch dasselbe Product 24, wenn man die Zahl 4, 6mahl nimmt, das heißt, wenn man 4 eben so oft zu sich selbst setzt, als man die Einheit zu sich selbst setzen muß, um 6 zu erhalten. Man erhält aber 6 aus $1+1+1+1+1+1$; eben so oft muß nun auch 4 zu sich selbst gesetzt werden, dann erhält man mit der Summe aus $4+4+4+4+4+4$ das Product 24.

Man sieht zugleich hieraus, daß es gleich viel sey, welcher von beyden Factoren als der Multiplicandus, und welcher als der Multiplicater betrachtet wird.

## 10.

Die Multiplication der zusammen gesetzten Zahlen gründet sich auf die Multiplication der einfachen Zahlen,

Zahlen, denn erstere ist nichts anders, als eine Wiederholung der letzten. Man bringt daher für die Anfänger die Producte dieser einfachen Zahlen in eine Tabelle, die unter der Benennung der Pythagorischen Rechentafel oder des Ein mahl Eins bekannt ist, und die Anfängern allerdings gute Dienste leistet.

Bey ihrer Verfertigung kann man also verfahren: Man theilt ein hinlänglich großes Viereck in neun senkrechte Streifen, und jeden Streifen wieder in neun gleiche Fächer, so erhält man überhaupt 81 kleine Fächer. Dann setzt man in die oberste Reihe, oder in die neun Fächer

| | | |
|---|---|---|
| Der 1sten | horizontalen Reihe | die einfachen Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung. |
| — 2ten | | das Doppelte der darüber stehenden Zahlen der ersten Reihe. |
| — 3ten | | die Summe der 2ten und 1sten Reihe. |
| — 4ten | | die S. der 3 und 1sten R. oder die doppelte zweyte Reihe. |
| — 5ten | | die S. der 4 und 1sten Reihe. |
| — 6ten | | die S. der 5 und 1sten R. oder die doppelte dritte Reihe. |
| — 7ten | | die Summe der 6ten und 1sten Reihe. |
| — 8ten | | die S. der 7 und 1sten R. oder die doppelte vierte Reihe. |
| — 9ten | | die Summe der 8ten und 1sten Reihe. |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

### Anmerkung.

Diese 64 oder eigentlich nur 36 verschiedenen Producte aller einfachen ganzen Zahlen müssen sich Anfänger so bekannt machen, daß sie ihnen eben so geschwind einfallen, als sie die Factoren selbst denken oder aussprechen.

11.

Es sind aber bey der Multiplication ganzer Zahlen drey verschiedene Fälle möglich. Denn es können

1. entweder beyde Factoren einfache Zahlen seyn.
2. Oder der eine Factor kann eine einfache, der andere eine zusammen gesetzte Zahl seyn.
3. Oder beyde Factoren können zusammen gesetzte Zahlen seyn.

12.

Der erste Fall, wenn so wohl der Multiplicandus als auch der Multiplicator eine einfache Zahl ist, bedarf keiner besondern Erläuterung, weil die Producte aller einfachen Zahlen in der Pythagorischen Rechentafel §. 10 enthalten sind.

Denn

Denn soll man z. B. 6 in 8 multipliciren, so findet man das Product in dem Fache, in welchem die sechste horizontale und achte vertikale Reihe, oder auch die achte horizontale und sechste vertikale Reihe zusammen laufen. In diesen beyden Fächern findet man die Zahl 48; es ist also das Product aus 6 mahl 8, oder aus 8 mahl 6 = 48.

## 13.

Der zweyte Fall war: Wenn der eine Factor eine einfache, der andere Factor eine zusammen gesetzte Zahl ist.

Man soll z. B. 246 in 8 multipliciren.

Es sey hier der Multiplicandus 246
der Multiplicator 8

Partialproducte { 48, 32., 16..

Product 1968

Man nehme

1. die 6 Einheiten 8 mahl, das machen 48 Einer, oder 8 Einer, welche in die Stelle der Einer, und 4 Zehner, die in die Stelle der Zehner gesetzt werden.
2. Die folgenden 4 Zehner 8 mahl, machen 32 Zehner, oder 2 Zehner, die in die Stelle der Zehner, und 3 Hunderte, die in die Stelle der Hunderte gesetzt werden.
3. Die folgenden 2 Hunderte 8 mahl, machen 16 Hunderte, oder 6 Hunderte, die in die Stelle der Hunderte, und 1 Tausender, der in die Stelle der Tause. de gesetzt wird.

Nun hat man nach der Anzahl der Ziffern im Multiplicandus auch drey Partialproducte erhalten. Addirt man nun diese drey Partialproducte, so daß die Ziffern einer jeden Klasse zusammen genommen werden, so erhält man 8 Einer, 2 + 4 d. i. 6 Zehner, 6 + 3 Hunderte d. i. 9 Hunderte, und 1 Tausender. Folglich ist das Hauptproduct 1968.

14.

Man sieht bald, daß man das Verfahren sehr hätte abkürzen können; denn man hätte nur die 4 Zehner nach Nr. 1 sogleich zu den 32 Zehnern nach Nr. 2 hinzu thun dürfen, dann hätte man 32 + 4 Zehner = 36 Zehner oder 6 Zehner und 3 Hunderte erhalten, davon hätte man die 6 Zehner in die Stelle der Zehner gesetzt, und die 3 Hunderte zum Product der folgenden Klasse gerechnet.

Das folgende Product der 2 Hunderte in 8 macht 16 Hunderte, und die vorhin erhaltenen 3 Hunderte dazu, machen 19 Hunderte, oder 9 Hunderte, die man in die Stelle der Hunderte, und 1 Tausender, den man in die Stelle der Tausende gesetzt hätte; dann hätte die Rechnung so ausgesehen:

| | |
|---|---|
| Multiplicandus | 246 |
| Multiplicator | 8 |
| Product | 1968 |
| | 3 4 |

Beweis.

Die Zahl 246 ist = 6 + 40 + 200, es muß also auch die Summe der Producte aus 6 in 8, aus 40 in 8 und aus 200 in 8 dem Product aus 246 in 8 gleich seyn. II § 12.

Nun

Nun aber ist 6, 40, 200 } 8 mahl genommen = { 48, 320, 1600

Folglich 246 in 8 multiplicirt = 1968.

15.

Der dritte Fall war: Wenn beyde Factoren aus zusammen gesetzten Zahlen bestehen.

Dieser Fall ist eine so oft wiederholte Anwendung des zweyten Falles, als der Multiplicator Ziffern enthält.

Man soll z. B. die Zahlen 72648 und 2345 in einander multipliciren.

Es sey der Multiplicandus 72648
so ist der Multiplicator 2345

Partialproducte { 363240, 290592., 217944.., 145296...

Hauptproduct 170359560

Man multiplicire den Multiplicandus

1. In die erste Ziffer 5 des Multiplicators, und setze das 5fache Product, nämlich 363240 Einer, unter die Linie so, daß die 0 in die Stelle der Einer zu stehen kommt.
2. In die zweyte Ziffer des Multiplicators, nämlich in 4 Zehner, und setze das 4fache Product oder 290592 Zehner unter das vorige Partialproduct so, daß die erste Ziffer 2 in die Stelle der Zehner zu stehen kommt.
3. In die dritte Ziffer des Multiplicators, nämlich in 3 Hunderte, und setze das 3fache Product oder 217944 Hunderte unter das zweyte Partialpro-

duct

duct so, daß die erste Ziffer 4 in die Stelle der Hunderte zu stehen kommt.

4. In die vierte Ziffer des Multiplicators, nämlich 2 Tausende, und setze das 2fache Product oder 145296 Tausende unter das dritte Partialproduct so, daß die erste Ziffer 6 in die Stelle der Tausende zu stehen kommt.

5. Endlich addire man die erhaltenen vier Partialproducte, so erhält man mit der Summe derselben das verlangte Hauptproduct.

Es ist leicht zu sehen, daß, wenn bey Findung der Partialproducte und bey Summirung derselben kein Fehler begangen worden, die gefundene Zahl 17035956o das wahre Product der beyden gegebenen Factoren seyn müsse. Denn wenn der Multiplicator 2345 aus 5 + 40 + 300 + 2000 besteht, und wenn

| | | | |
|---|---|---|---|
| das 5fache | | | 363240 ist |
| das 40 — | } v. | 72648 = | 2905920 — |
| das 300 — | | | 21794400 — |
| das 2000 — | | | 145296000 — |

so muß das 2345fache von 72648 = 17035956o seyn.

16.

Enthält der Multiplicator Nullen, so muß man bey Untersetzung der Partialproducte nur dahin sehen, daß die Ziffer der niedrigsten Klasse, d. i. die erste Ziffer rechter Hand eines jeden Partialproducts, unter die Ziffer des Multiplicators zu stehen kommt, durch dessen Multiplicirung es entstanden ist.

12568
20306
75408
37704..
25136....
255205808

17.

Hat ein Factor oder haben beide Factoren am Ende rechter Hand Nullen, so hängt man sie ans Product der Ziffern.

So giebt 160 multiplicirt und 144
in 9 in 60
das Prod. 1440 das Product 8640
und 144000 multiplicirt
in 80
giebt das Product 11520000

18.

Denjenigen, deren Kopf fürs so genannte Einmahl Eins nicht Raum genug hat, glaubt man mit den von ihrem Erfinder so genannten Nepperschen Stäbchen zu rathen. Es ist dies aber mehr eine sinnreiche, als bequeme Art zu multipliciren. Indessen verhält sichs damit folgendergestalt. S. die beygelegte Figur.

Man verfertigt hölzerne Stäbchen, oder nimmt Streifen von starker Pappe, etwa $2\frac{1}{2}$ Zoll lang und $\frac{1}{4}$ Zoll breit, theilt jedes in zehn gleiche Theile oder Quadrate, jedes Quadrat, das oberste ausgenommen, durch eine Diagonallinie vom obern rechten Winkel nach dem untern linken Winkel in zwey Dreyecke. In jedes ungetheilte Quadrat der obersten Reihe schreibt man eine von den einfachen Zahlen.

In

In die erste Reihe darunter dieselben darüber stehenden Zahlen.

In die 2te Reihe das zweifache
— — 3 — das dreifache
— — 4 — das vierfache
— — 5 — das fünffache
— — 6 — das sechsfache
— — 7 — das siebenfache
— — 8 — das achtfache
— — 9 — das neunfache

der den Quadraten der obersten Reihe eingeschriebenen Zahlen.

doch so, daß, wenn das Doppelte, Dreifache, Vierfache ꝛc. eine zusammengesetzte Zahl ist, die simpeln Einheiten ins untere, die Zehner aber in das obere Dreyeck zu stehen kommen; bey einfachen Zahlen aber bleibt das obere Dreyeck entweder leer oder wird mit einer Null ausgefüllt.

Auf ein besonderes Stäbchen, welches aus eben solchen Abtheilungen, doch ohne Diagonallinien, besteht, schreibt man die Zahlen 1, 2, 3, bis 9.

19.

Wollte man z. B. die Zahl 6237891504 vermittelst dieser Nepperschen Stäbchen multipliciren in 1307968542, so lege man die 10 Streifen, die oben mit den Ziffern des Multiplicandus bezeichnet sind, in derselben Ordnung neben einander, und daneben den Streifen ohne Diagonallinien. Dann schreibe man

1. Aus der Reihe, vor welcher die 2 steht, das doppelte Product des Multiplicandus ab, indem man die 8 linker Hand für sich allein nimmt, und dann immer die beiden Ziefern, die in jeder rautenförmigen Figur zweier neben einander liegenden Streifen über einander stehen, addirt, nämlich

lich 0 + 0 = 0; 0 + 0 = 0; 2 + 1 = 3; 8 + 0 = 8; 6 + 1 = 7; 4 + 1 = 5; 6 + 1 = 7; 4 + 0 = 4; 2 + 0 = 2 und zulezt die 1. Es ist also das doppelte Product

1 0 0 1 1 1 0 1 0 0
2 4 6 4 6 8 2 0 0 8

1 2 4 7 5 7 8 3 0 0 8

2. Aus der Reihe, vor welcher die 4 steht, schreibe man das vierfache Product ab, und setze es unter das vorige so unter, daß die Ziefer der niedrigsten Klasse, nämlich 6, gerade unter die Ziefer 4 des Multiplicators zu stehen kommt.

2 0 1 2 3 3 0 2 0 1
4 8 2 8 2 6 4 0 0 6

2 4 9 5 1 5 6 6 0 1 6

3. Aus der Reihe, vor welcher die 5 steht, schreibe man das fünffache Product ab, und setze es gehörig unter.

3 1 1 3 4 4 0 2 0 2
0 0 5 5 0 5 5 5 0 0

3 1 1 8 9 4 5 7 5 2 0

4. Die folgende Ziffer des Multiplicators ist 8, man addire also die Zahlen aus der Reihe, vor welcher die 8 steht.

4 1 2 5 6 7 0 4 0 3
8 6 4 6 4 2 8 0 0 2

4 9 9 0 3 1 3 2 0 3 2

5. Nun folgt im Multiplicator die Ziffer 6. Das sechsfache Product ist also in der Reihe, vor welcher die 6 steht, enthalten, nämlich: 4; 0 + 2 = 2; 0 + 0 = 0; 6 + 3 = 9; 4 + 0 = 4; 8 + 5 = 13 = 3 + 10; 2 + 4 und die in

der

der vorigen Summe enthaltenen 10 als 1 dazu, sind 7; 8 + 4 = 12; 2 + 1 und die 1 aus der vorigen Summe = 4; 6 + 1 = 7; 3. Also: 37427349024

6. Das Product der folgenden Ziffer des Multiplicators, nämlich 9, findet man in der Reihe, vor welcher die 9 steht.

5 1 2 6 7 8 0 4 0 3
4 8 7 3 2 1 9 5 0 6
5 6 1 4 1 0 2 3 5 3 6

7. Das Product der Ziffer 7 des Multiplicators findet man in der Reihe, vor welcher die 7 steht.

4 1 2 4 5 6 0 3 0 2
2 4 1 9 6 3 7 5 0 8
4 3 6 6 5 2 4 0 5 2 8

8. Nun folgt im Multiplicator 0; man sollte daher auch eine Reihe Nullen untersetzen, welches aber ganz überflüssig seyn würde. Man nimmt also gleich

9. Das dreifache Product aus der Reihe, vor welcher die 3 steht, und setzt die niedrigste Ziffer dieses Produkts, nämlich 2, gerade unter die 3 im Multiplicator unter.

1 0 0 2 2 2 0 1 0 1
8 6 9 1 4 7 3 5 0 2
1 8 7 1 3 6 7 4 5 1 2

10. Endlich das Einfache aus der Reihe, vor welcher die Zahl 1 steht. Oder man darf auch nur den Multiplicandus untersetzen.

11. Nun werden diese Partialproducte addirt; die Summe derselben ist das verlangte Product.

12475783008
24951566016
31189457520
49903132032
37427349024
56141023536
43665240528
18713674512 0
6237891504

81589658556410 67168.

20.

Folgende Art, ohne Beyhülfe des Einmahl Eins zu multipliciren, ist bequemer, man braucht dabey auch nur addiren zu können. Es habe jemand, der bloß addiren kann, die Zahlen des 15ten §, nämlich 72648 und 2345, in einander zu multipliciren. Man setze den gegebenen Multiplicandus besonders, und suche dann, nach Maßgabe des Multiplicators,

1. Das Doppelte des Multiplicandus, indem man jede Ziffer zu sich selbst addirt.

2. Das Dreyfache, indem man den doppelten Multiplicandus zum einfachen addirt.

3. den vierfachen Multiplicandus, indem man entweder den zuletzt gefundenen dreifachen zum einfachen, oder den doppelten zu sich selbst addirt.

4. den fünffachen, indem man entweder den vierfachen zum einfachen, oder den dreifachen zum doppelten Multiplicandus addirt. Besteht der Multiplicator auch noch aus andern Ziffern, so muß man auch noch das so vielfache des Multiplicandus suchen.

Es ist also in unserm Exempel

| | | | |
|---|---|---|---|
| der 1fache | Multiplicandus | | 72648 |
| der 2fache | — | — | 145296 |
| der 3fache | — | — | 217944 |
| der 4fache | — | — | 290592 |
| der 5fache | — | — | 363240 |

Multiplicandus 72648
Multiplicator 2345

363240
290592
217944
145296

Product 170359560

Man setzt nämlich

1. Den oben stehenden fünffachen Multiplicandus, nämlich 363240, unter die Linie, so daß die 0 rechter Hand unter die 5 des Multiplicators zu stehen kommt.
2. Darunter den vierfachen Multiplicandus, nämlich 290592, so, daß die Ziffer der niedrigsten Klasse, nämlich 2, in gerader Linie unter die 4 des Multiplicators zu stehen kommt.
3. Darunter den dreifachen Multiplicandus, nämlich 217944, so, daß die 4 in gerader Linie unter die 3 des Multiplicators zu stehen kommt.
4. Darunter endlich den zweifachen Multiplicandus, nämlich 145296, so daß die Ziffer der niedrigsten Klasse, nämlich 6, unter die 2 des Multiplicators zu stehen kommt.

Dann werden diese vier Partialproducte addirt, so erhält man mit der Summe derselben das verlangte Product.

21.

Wenn man noch nicht dividiren kann, und doch wissen will, ob man recht gerechnet habe, so muß man entweder die Rechnung wiederholen; oder man kann auch den Multiplicandus zum Multiplicator, und den Multiplicator zum Multiplicandus machen. Da auf diese Art die Ordnung ganz umgekehrt wird, folglich auch ganz andere Partialproducte erscheinen, so ists nicht leicht möglich, eben denselben Fehler weder bey der Multiplication noch bey der Addition der Partialproducte zweymahl zu machen. Man kann sich daher von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt halten, wenn man auf diesem Wege dasselbe Hauptproduct erhält, z. B.

| | |
|---|---|
| 864297 | 43598 |
| 43598 | 864297 |
| 6914376 | 305186 |
| 7778673. | 392382. |
| 4321485.. | 87196.. |
| 2592891... | 174392... |
| 3457188.... | 261588.... |
| | 348784..... |
| 37681620606 | 37681620606 |

22.

Besteht der Multiplicandus aus einer, zwei- oder vielgliedrigen Zahl, so schließt man alle Theile, woraus der Multiplicandus besteht, in eine Klammer ein, und setzt den Multiplicator entweder vor oder hinter die Klammer. Eben so wirds auch gehalten mit den Multiplicator, wenn er aus mehreren Gliedern besteht. Z. B.

(8 † 12). 3 = 20. 3 = 60.
(15 † 20 † 25) 5 = 60. 5 = 300.
(18 — 3) 10 = 15. 10 = 150.
(12 — 18 † 24) (4 † 3) = 18. 7 = 126.
(12 — 24 † 18) (10 — 6) = 6. 4 = 24.

23.

Ehe wir zur Division übergehen, will ich erst noch in einem besondern Exempel zeigen, wie man den vielfachen Subtrahendus vom Minuendus abzieht.

Man soll z. B. das 3fache Product der Zahl 246075 abziehen von der Zahl 1684309.

Der Minuendus 1684309
Der Subtrahendus 246075 multiplicirt in 3.

Rest 946084

Man zieht nämlich

a. 3 mahl 5 oder 15 ab von 9, weil aber das nicht angeht, so nehme man gleich 15 von 19, dann bleibt 4.
b. 3 mahl 7 Zehner oder 21 Zehner und den Nro. a zugenommenen 1 Zehner, macht 22, von 0 oder gleich von 30 Zehnern, bleiben 8 Zehner.
c. 3 mahl 0 Hunderte oder 0 und die Nro. b zugenommenen 3 Hunderte, machen 3 Hunderte, von 3 Hundert bleibt 0 Hundert.
d. 3 mahl 6 Tausende oder 18 Tausende von 4 oder gleich von 24 Tausenden, bleiben 6 Tausende.
e. 3 mahl 4 Zehen tausende oder 12, und die Nro. d zugenommenen 2 Zehen tausende, sind 14 Zehen tausende, von 8 oder dafür gleich von 18 Zehen tausenden, bleiben 4 Zehen tausende.

f. 3 mahl 2 Hundert tausende oder 6 und das Nro. e zugenommene 1 Hundert tausend machen 7 Hundert tausend, von 16 Hundert tausenden bleiben 9 Hundert tausende.

## 24.

### Einige Exempel zum nachrechnen.

a. 1968 in 9 = 17712. b. 17712 . 7 = 123984. c. 123984 . 5 = 619920. d. 619920 . 8 = 4959360. e. 13579 . 9 = 122211. f. 12345. 67890 = 838102050.

g. 54321 . 67890 = 3687852690.

h. 54321 . 9876 = 536474196.

i. 1792 . 365 = 654080.

k. 838102050 . 2050 = 1718109202500.

l. Von 838102050 soll abgezogen werden 9 mahl 23456789, bleibt der Rest 626990949.

m. Von 626990949 abgezogen 5 mahl 35792468, bleibt der Rest 448028609.

61

## 25.

Ich will nun noch einige, aber nur die vorzüglichsten Vortheile anführen, die theils zur Abkürzung, theils zur Erleichterung des Multiplicirens dienen.

1. Wenn die erste oder letzte Ziffer des Multiplicators 1 ist, so kann man das Untersetzen des Multiplicandus ersparen, und dadurch die Rechnung abkürzen.

| I. | II. |
|---|---|
| 1728 in 361 | 1728 in 163 |
| 10368. | 10368 |
| 5184.. | 5184 |
| 623808 | 281664. |

I. Der Multiplicator 361 ist = 1 + 60 + 300. Um nun das 361fache zu erhalten, darf man nur zum 1fachen, das aber ist der Multiplicandus selbst, das 60fache und 300fache addiren.

II. Hier ist der Multiplicator 163 = 100 + 60 + 3. Denkt man sich nun an den Multiplicandus 1728 zwey Nullen, so hat man das 100fache desselben. Hierzu das 6fache mit einer Null, die man sich aber auch nur hinzu zu denken braucht, und endlich das 3fache des Multiplicandus. Man sieht zugleich hieraus, warum in diesem Fall die untere Reihen immer um eine Stelle rechter Hand vorgerückt werden müssen.

Dieser Vortheil besteht also bloß in Abkürzung der Arbeit.

26.

2. Man gewinnt sehr viel, wenn man sich gewöhnt, mit den Zahlen, die öfters vorkommen, und aus zwey Ziffern bestehen, auf einmahl zu multipliciren.

Dergleichen sind die Verhältnißzahlen 24, 12, 16, 11, 15. Da diese Zahlen das Verhältniß der Thaler zu den Groschen, der Groschen zu den Pfennigen; der Winspel zu den Scheffeln, der Scheffel zu den Metzen; der Steine und Centner zu den Pfunden, der Pfunde zu den Lothen, der Mandel zu den einzelnen Stücken u. s. w. ausdrücken, so kommen sie sehr häufig beym Resolviren der Zahlen von einer höhern Ordnung in die niedrigern und umgekehrt bey der Reduction der Zahlen einer niedrigen Ordnung in die höhere Ordnung vor. Man erhält dadurch einen doppelten Vortheil; denn man erspart dadurch theils das doppelte Multipliciren, theils das Addiren der Partialproducte.

a) 864 in 24 . b) 20736 in 12 . c) 248832 in 16.

20736 248832 3981312

d) 3981312 in 11. e) 43794432 in 15.

43794432 656916480

27.

3. Man resolvirt den einen Factor in solche Factoren, mit denen sich leicht multipliciren läßt. Hier findet nun ein doppelter Fall statt.

a. Der zum Resolviren gewählte Factor ist wirklich gerade ein Factum aus mehrern einfachen oder andern bequemen Factoren.

In diesem Fall multiplicirt man den gegebenen Multiplicandus in den einen kleinern Factor, das erhaltene Product in den andern u. s. w. Man gewinnt dadurch wenigstens so viel, daß man nicht nöthig hat, die Partialproducte zu addiren.

I. 3579 in 1536 (16 (12 (8

57264 16. 12. 8.

687168

5497344

II. 8642 in 378 (9 (7 (6

77778 9. 7. 6.

544446

3266676

Nro. I. Hier ist der Multiplicator 1536 in 16. 12. 8 resolvirt. Das Einfache oder der Multiplicandus 3579 ist erst in 16 multiplicirt, dann das 16fache in 12, und endlich das 16 mahl 12 oder 192fache in 8. Man hat auf die Art mit dem letzten Product eben so wohl das 1536fache erhalten, als wenn man auf gewöhnliche Art erst das 6fache dann das 30, ferner das 500 und endlich das 1000fache gesucht, und diese vier Partialproducte addirt hätte.

Noch ist zu merken, daß es vortheilhafter ist, mit dem größern Factor zu erst und dann mit den kleinern Factoren zu multipliciren.

28.

b. Oder der Multiplicator ist zwar an sich selbst kein Factum aus andern bequemen Factoren, gränzt aber doch nahe an eine solche Zahl. Hier ist wieder ein doppelter Fall möglich. Denn

α. Der gegebene Multiplicator ist entweder größer, als die an seiner Statt zum Resolviren gewählte Zahl.

Dann addirt man noch zum Product aus dem Multiplicandus in die erhaltenen Factoren den Multiplicandus so viel mahl genommen, als der gegebene Multiplicator mehr Einheiten enthielt, als die an seiner Staat gewählte und resolvirte Zahl.

23456 in 14853 oder 3. 110. 5. 9 † 3.

70368 das 3fache.

7740480 das 3 mahl 110 oder 330fache.

38702400 das 5 mahl 330 oder 1650fache.

34832160 0 das 9 mahl 1650 oder 14850fache.

70368 das 3fache.

34839196 8 das 14853fache.

Der Multiplicator 14853 ist = 14850 † 3, 14850 aber läßt sich resolviren in 3. 110. 5. 9. Nimmt man nun das 3fache 110 mahl, so bekommt man das 330fache. Dieses multiplicirt in 5 giebt das 1650fache, und das wieder in 9, giebt das 14850fache. Addirt man endlich zum 14850fachen noch das 3fache, so erhält man das verlangte 14853fache.

Es

Es ist hier nicht mit den größten sondern gerade mit den kleinsten Factor, nämlich mit der 3, zuerst multiplicirt worden. Das 3fache wurde am Ende noch einmahl gebraucht, es durfte also nur, wie es schon gefunden war, abgeschrieben werden.

65432 in 181475 = 181440 † 35.
458024 das 7fache (7. 24. 120. 9.) (7. 5.)
10992576 das 24 mahl 7 oder 168fache.
131910912o das 120 mahl 168 oder 20160fache.
11871982080 das 9 mahl 20160 oder 181440fache.
2290120 das 5 mahl 7 oder 35fache.
11874272200 das 181475fache.

29.

§. Oder der gegebene Multiplicator ist kleiner, als die an seiner Statt zum Resolviren gewählte Zahl.

In diesem Fall zieht man von dem letzten Product den Multiplicandus so viel mahl ab, als der gegebene Multiplicator weniger Einheiten enthielt, als die an seiner Statt gewählte Zahl.

2468 in 83149 = 83160 — 11.
27148 das 11fache. (11. 120. 9. 7.)
3257760 das 120 mahl 11 oder 1320fache.
29319840 das 9 mahl 1320 oder 11880fache.
205238880 das 7 mahl 11880 oder 83160fache.
27148 das 11fache.
205211732 das 83160fache weniger das 11fache.

30.

**4. Man zerfällt den Multiplicator in solche Theile, die ein gewisses Verhältniß gegen einander haben.**

97531 multipliciret in 87369

780248 (8
93629760 (120
8426678400 (90

8521185939

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 8 | 8 |
| 960 | 120 |
| 86400 | 90 |

Hier ist der Multiplicator 87369 in die Theile 1 + 8 + 960 + 86400 zerfällt. Man darf also nur das 1fache, 8fache, 960fache und 86400fache vom Multiplicandus addiren, so erhält man das 87369fache dasselbe. Um aber das 960fache zu bekommen, wenn man schon das 8fache hat, darf man das 8fache nur 120 mahl nehmen; und um das 86400fache zu erhalten, wenn man schon das 960fache gefunden hat, darf man nur das 960fache 90 mahl nehmen.

Die erste Reihe in diesem Exempel ist der 1fache Multiplicandus. Die zweyte Reihe enthält den 8fachen Multiplicandus oder das 1fache 8 mahl. Die dritte Reihe enthält den 960fachen Multiplicandus oder das 8fache 120 mahl. Die vierte enthält den 86400fachen Multiplicandus oder das 960fache 90 mahl.

Folglich ist die Summe in der fünften Reihe das 87369fache vom Multiplicandus.

43794432 multiplicirt in 24126.

262766592 das 6fache.
5255533184. das 20 mahl 6 oder 120fache.
105106636 8... das 200 mahl 120 od. 24000fache.

1056584466432 das 24126fache.

## 4. Das Dividiren.

31.

Dividiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere so viel mahl wegnehmen, als es möglich ist.

Soll aber eine Zahl von einer andern mehrmahl weggenommen werden können, so muß offenbar die erstere in der andern enthalten seyn, und zwar wenigstens so oft, als sie sich wegnehmen läßt. Daher heißt dividiren auch so viel, als untersuchen, wie vielmahl eine Zahl in einer andern enthalten ist. Dieser Begriff soll in der Folge zum Grunde gelegt werden, weil die Arbeit nach dem ersten Begriff sehr weitläuftig werden würde.

Die Zahl nun, mit der man diese Untersuchung anstellt, heißt der Dividendus; die andere Zahl, von der man wissen will, wie vielmahl sie im Dividendus enthalten sey, heißt der Divisor; die Zahl aber, welche anzeigt, wie vielmahl der Divisor im Dividendus enthalten ist, heißt der Quotient.

### Anmerkung.

Man kann auch sagen: Man dividirt eine Zahl, wenn man sie in so viel gleiche Theile theilt, als eine andere gegebene Zahl, nämlich der Divisor, Einheiten enthält, und dann einen von diesen gleichen Theile nimmt.

32.

Man kann aber beym Dividiren in ganzen Zahlen folgende Fälle unterscheiden. Entweder ist

1. Der Divisor eine einfache Zahl, und
   a. Der ganze Dividendus ist in der Pythagorischen Tafel befindlich.

Ist dies, so findet man auch den Quotienten in der Tafel. Z. B. 72 soll dividirt werden durch 8,

oder 72 : 8 (I. § 10.) Weil 72 ein Product ist aus 8 in 9, so muß 9 der Quotient seyn, weil 8 der Divisor war.

Umgekehrt giebt 72 : 9 zum Quotienten 8, weil der andere Factor 9 der Divisor war.

Eben so ist 36 : 4 = 9; und 36 : 9 = 4. 15 : 3 = 5; und 15 : 5 = 3. 28 : 4 = 7; und 28 : 7 = 4.

33.

b. Oder der Dividendus ist zwar nicht selbst in der Pythagorischen Tafel zu finden, ist aber nur etwas größer als ein Product in der Reihe des Divisors.

Z. B. 57 soll dividirt werden durch 7. In der horizontalen Reihe des Divisors, nemlich 7, ist die dem gegebenen Dividendus 57 nächst kleinere Zahl 56; 56 aber ist ein Factum aus 7 in die in der obersten Reihe über 56 stehende Zahl 8. Da nun 7 der Divisor ist, so muß der andere Factor 8 der Quotient seyn, und überdem noch 1 Theil, deren 7 ein Ganzes machen, oder der siebende Theil von einem Einer, weil 1 übrig bleibt, wenn man 56 von 57 abzieht. Eben so ist

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26 | : | 4 | = | 6 und zwey Viertel darüber. |
| 26 | : | 6 | = | 4 und zwey Sechstel darüber. |
| 38 | : | 5 | = | 7 und drey Fünftel darüber. |
| 38 | : | 7 | = | 5 und drey Siebentel darüber. |
| 79 | : | 8 | = | 9 und sieben Achtel darüber. |
| 79 | : | 9 | = | 8 und sieben Neuntel darüber. |
| 38 | : | 4 | = | 9 und zwei Viertel darüber. |
| 38 | : | 9 | = | 4 und zwey Neuntel darüber. |

Dividendus. Divisor. Quotient.

34.

c. Oder der Dividendus besteht aus mehr, als zwey Ziefern.

Hier dividirt man nach und nach einen Theil des Dividendus, und fängt damit von der linken Hand an. Es soll z. B. die Zahl 4564 durch 7 dividirt werden. Man setze den Divisor 7 — etwa in einen halben Mond eingeschlossen — vor den Dividendus, mache hinter dem Dividendus eine kleine senkrechte Linie, und setze hinter diese Linie die Theile des Quotienten, wie sie nach und nach gefunden werden, folgendergestalt:

Divisor. Dividendus. Quotient.

```
7)  4564 | 652
    42::
    ----
     36:
     35:
     --
      14
      14
      --
       0
```

Man untersucht nämlich:

1. Wie oft der Divisor 7 in dem Theil 45 des Dividendus enthalten sey; den Quotienten 6 setzt man an seinen Ort hinter die Linie, multiplicirt den Divisor 7 in den gefundenen ersten Theil des Quotienten, nämlich 7 mahl 6 = 42, setzt 42 unter 45, und zieht 42 ab von 45, so bleibt der Rest 3. An diesen Rest setzt man die nächst folgende Ziffer 6 des Dividendus herunter, und untersucht nun
2. Wie oft der Divisor 7 in 36 als dem folgenden Theil enthalten sey. Den Quotienten 5 setzt man neben den ersten Theil, das Product aber aus 7 mahl

7 mahl 5 = 35 setzt man unter die Zahl 36, und zieht 35 ab von 36, so bleibt der Rest 1, zu welchem man wieder die folgende 4 des Dividendus herunterſetzt, daß also der letzte Theil des Dividendus 14 ist, und untersucht nun

3. Wie oft 7 in diesem letzten Theil 14 enthalten sey, so erhält man mit der 2 den dritten Theil des Quotienten, den man neben den zweiten Theil setzt. Das Product aber aus 7 mahl 2 = 14 wird unter 14 gesetzt und davon abgezogen, und weil nichts übrig bleibt, so ist 7 in 4564 gerade 652 mahl enthalten, oder 652 ist der Quotient aus 4564 dividirt durch 7.

Beweis.

Der Dividendus 4564 ist = 4500 + 60 + 4.

| Divisor. | Theile des Dividendus. | Theile des Quotienten. |
|---|---|---|
| 7 | in 4500 | 600 . (7.600 = 4200.) |
| 7 | in 3.60 | 50 . (7.50 = 350.) |
| 7 | in 1. 4 | 2 . (7.2 = 14.) |
| Folglich 7 | in 4564 | 652 mahl enthalten. 4564. |

35.

2. Oder der Divisor folglich auch der Dividendus sind zusammengesetzte Zahlen.

In diesem Fall muß man wiederum, anstatt des ganzen Dividendus, nach und nach seine Theile dividiren. Da aber auch wiederum jeder Theil als eine zusammengesetzte Zahl erscheinet, so hält man sich an eine ungefähre Schätzung des Divisors gegen den jedesmahligen Theil des Dividendus, und wenn die erste Ziffer des Divisors linker Hand merklich größer ist, als die übrigen Ziffern desselben, so

kann

kann man in den meisten Fällen sicher schließen, daß der ganze Divisor eben so oft in dem ganzen jedesmahligen Theil des Dividendus enthalten sey, als die erste Ziffer des Divisors in dem zugehörigen Theil des Dividendus. Ist aber die erste Ziffer des Divisors kleiner als die folgende, dann gilt der Schluß nur in den wenigsten Fällen, und man muß dann durchs Probieren den Quotienten erforschen.

Man soll z. B. 238328 durch 62 dividiren. Dies kann folgendergestalt geschehen.

62) 238328 | 3844
186:::
523::
496::
272:
248:
248
248
0

Man untersucht nämlich

1. Wie vielmahl der Divisor 62 in dem Theil 238 enthalten sey. Man kann bald finden, daß er 3 mahl darin stecke. Man setzt also die 3, als den ersten Theil des Quotienten, an seinen Ort hinter den Strich, multiplicirt dann diese 3 in den Divisor, und setzt das Product 186 unter den dividirten Theil 238, zieht jenes von diesem ab, so bleiben 52 übrig. Zu diesem Rest 52 setzt man die folgende Ziffer 3 des Dividendus, und dividirt nun
2. 523 durch 62. Den Quotienten 8 setzt man neben den gefundenen ersten Theil 3, zieht das

Pro-

Product aus 8 mahl 62 = 496 ab von dem Theil 523 des Dividendus, so bleiben übrig 27. Zu diesen Rest setzt man die folgende Ziffer 2 des Dividendus, und dividirt dann

3. 272 durch 62. Den Quotienten 4 setzt man hinter die gefundenen beyden ersten Theile 38 des Quotienten, und zieht das Product aus 4 mahl 62 = 248 ab von dem Theil 272 des Dividendus, so bleiben übrig 24. Zu diesen Rest setzt man endlich die letzte Ziffer 8 des Dividendus, und dividirt noch

4. 248 durch 62. Den Quotienten 4 setzt man neben die gefundenen ersten drey Theile, und zieht das Product aus 4 mahl 62 = 248 ab von 248, da denn nichts übrig bleibt. Der Quotient ist also 3844.

## Anmerkung.

Die Art des Verfahrens bey diesem und dem vorhergehenden Exempel ist für Anfänger wohl die leichteste und faßlichste. Auch kann man bald die Probe machen, ob man recht gerechnet; denn man darf nur die einzelnen abgezogenen Producte aus dem Divisor in den jedesmahligen Theil des Quotienten addiren, da denn mit der Summe der Dividendus wieder herauskommen muß, wenn man recht gerechnet. So z. B. im vorigem Exempel 186

496

248

248

238328.

36.

Man kann auch ohne Beyhülfe des Einmahl Eins dividiren, wenn man jedesmahl durch die Addition

dition das 2, 3 bis 9fache des Divisors sucht, und damit jeden Theil des Dividendus vergleicht.

Wollte man z. B voriges Exempel auf diese Art berechnen, so könnte dies folgendergestalt geschehen.

62 der einfache Divisor.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 124 | der 2fache. | 238328 | 3844. |
| 186 | — 3 — | 186::: | |
| 248 | — 4 — | 523:: | |
| 310 | — 5 — | 496:: | |
| 372 | — 6 — | 272: | |
| 434 | — 7 — | 248: | |
| 496 | — 8 — | 248 | |
| 558 | — 9 — | 248 | |
| | | 0 | |

Hat man sich eine solche Tabelle vom 1fachen bis 9fachen Divisor angefertigt, so vergleiche man

1. Den ersten Theil 238 des Dividendus mit einer von den neun Zahlen aus dieser Tabelle, und nehme die nächst kleinere Zahl, wenn nicht etwa der zu dividirende Theil selbst darunter befindlich ist. In diesem Fall ist die nächst kleinere Zahl 186, diese aber ist das 3fache vom Divisor. Man setze also 3 in die Stelle des Quotienten, und ziehe die Zahl 186 ab von 238, so bleiben übrig 52, wozu man die folgende Ziffer 3 des Dividendus setzt.
2. Nun vergleiche man wieder 523 mit einer von jenen Zahlen in der Tabelle; die Zahl, die der Zahl 523 am nächsten kommt, ist 496 oder der 8fache Divisor. Man setze also 8 in die Stelle des Quotienten, und ziehe die Zahl 496 ab von

523, so bleibt übrig 27, wozu man die folgende Zahl 2 des Dividendus setzt, und

3. Den Theil 272 mit einer Zahl in der Tabelle vergleicht. Die der Zahl 272 nächst kleinere Zahl ist 248 oder der 4fache Divisor. Man setze nun 4 in die Stelle des Quotienten, und ziehe 248 ab von 272, so bleiben übrig 24, woran man die letzte Ziffer 8 des Dividendus hängt, und nun

4. Diesen letzten Theil 248 mit einer Zahl in der Tabelle vergleicht. Hier findet man, daß 248 selbst der 4fache Divisor ist. Man setze also 4 in die Stelle des Quotienten, und ziehe 248 ab von 248, da denn nichts übrig bleibt. Es ist also wieder der ganze Quotient 3844.

37.

Anstatt das jedesmalige Product aus dem gefundenen Theil des Quotienten in den Divisor unterzusetzen und dann abzuziehen, kann man, wenn man sich nach § 23 mit der Subtraction des Vielfachen gehörig bekannt gemacht und darin eine Fertigkeit erlangt hat, die Arbeit sehr abkürzen.

62) 238238 | 3844
§274
2

Man dividirt nämlich

1. den Theil 238 durch 62; der Quotient ist 3. Nun zieht man
   a. 3 mahl 2 = 6 ab von 8, und setzt den Rest 2 unter die durchstrichne 8.
   b. 3 mahl 6 = 18 ab von 23, und setzt den Rest 5 unter die durchstrichne Zahl 23.
2. Den Theil 523 durch 62; der Quotient ist 8. Man ziehe also

a. 8 mahl 2 = 16 ab von 3, oder gleich von 23, und setze den Rest 7 unter die durchstrichne Zahl 3.

b. 8 mahl 6 = 48 und die nach Nro. a. zugenommene 2 macht 50 ab von 52, und setze den Rest 2 unter die durchstrichne Zahl 52, oder man lasse lieber gleich die 2 stehen, und durchstreiche bloß 5.

3. Den Theil 272 durch 62; der Quotient ist 4. Man ziehe also

a. 4 mahl 2 = 8 ab von 2, oder gleich von 12, und setze den Rest 4 unter die durchstrichne 2.

b. 4 mahl 6 = 24, und die nach Nro. a. zugenommene 1 macht 25 ab von 27, den Rest 2 setze man unter die 7 und durchstreiche 27.

4. Den Theil 248 durch 62; der Quotient ist 4. Nun ziehe man

a. 4 mahl 2 = 8 ab von der zu durchstreichenden 8, so bleibt übrig 0.

b. 4 mahl 6 = 24 ab von der zu durchstreichenden Zahl 24, so bleibt auch hier nichts übrig, das heißt: der Divisor geht in dem Dividendus auf, und der Quotient ist wieder 3844.

38.

Anstatt die jedesmahligen Reste unter die Ziffern des Dividendus zu setzen, kann man sie auch darüber setzen, und zwar folgendergestalt.

x
§x74
62) xx8xx8 | 3844.

39.

Ist der Divisor größer, als der zu dividirende Theil des Dividendus, so ist jener in diesem kein

mahl enthalten; dies aber muß dann im Quotienten mit einer Null angezeigt werden. Es soll z. B. 15252992 durch 248 dividirt werden.

xx
374
15252992 | 61504.
2488848
2442
2

40.

Besteht der Divisor und Dividendus am Ende aus Nullen, so kann man von beyden eine gleich große Anzahl Nullen wegstreichen. Man soll z. B. 15625000 durch 2500 dividiren. Dies ist so viel, als sollte 156250 durch 25 dividirt werden.

x
156250ØØ | 6250.
2555 ØØ
22

41.

Es ist nicht schlechterdings nöthig, daß der Divisor in dem Dividendus allemahl gerade aufgehe, oder daß nichts übrig bleibe; nur muß der Rest nie größer seyn, als der jedesmahlige Divisor. Es soll z. B. 24680 durch 135 dividirt werden.

1
3
xxx1
24680 | 182.
x3555
x33
x

Hier

Hier ist der Quotient 182 und noch 110 Theile von der in 135 Theile getheilten Einheit.

42.

Die Probe macht man folgendergestalt. Man multiplicirt den gefundenen Quotienten in den Divisor, da denn, wenn man richtig gerechnet hat, mit dem Producte der Dividendus erscheinen muß. Doch muß man nicht vergessen, den etwa gebliebenen Rest noch zum Product hinzu zu thun. So war der Quotient (§ 41) 182, der Rest 110. Es muß daher auch (135. 182) + 110 = 24680 seyn.

43.

Exempel zum Nachrechnen.

a. 17712 : 9 = 1968. b. 123984 : 7 = 17712. c. 619920 : 5 = 123984. d. 122211 : 9 = 13579. e. 4959360 : 8 = 619920. f. 838102050 : 12345 = 67890. g. 838102050 : 67890 = 12345. h. 3687852690 : 67890 = 54321. i. 3687852690 : 54321 = 67890. k. 1718109202500 : 2050 = 838102050.

44.

Der wahren Vortheile, wodurch das Dividiren erleichtert und abgekürzt wird, sind nur wenige. Der vornehmste Vortheil besteht darin, daß man den Divisor, wenn es angeht, in seine Faktoren resolvirt, und durch diese nach und nach dividirt. Hier ists denn wieder sehr gut, wenn man sich gewöhnt, durch die §. 26 angeführten Zahlen auf einmahl zu dividiren.

Uebrigens pflegt man hier den Quotienten unter den Dividendus zu setzen, und beyde durch eine Horizontallinie von einander zu trennen.

11) 43794432 / 3981312 12) 248832 / 20736 15) 12629925 / 841995

16) 215550720 / 13471920 24) 323326080 / 13471920

57024 ) : 910787328

12) 4752 — 75898944 der 12te Theil.

12) 396 — 6324912 der 144ste Theil.

11) 36 — 574992 der 1584ste Theil.

6) 6 — 95832 der 9504te Theil.

15972 der 57024ste Theil.

Bey dem letzten Exempel ist der Divisor 57024 resolvirt in 12. 12. 11. 6. 6. Der Dividendus ist daher erst durch 12 dividirt, vom 12ten Theil ist wieder der 12te Theil genommen, und man hat also dadurch schon den 144sten Theil erhalten. Nimmt man nun wieder vom 144sten Theil den 11ten Theil, so bekommt man den 1584sten Theil; vom 1584sten Theil den 6ten Theil genommen, giebt den 9504ten Theil, nimmt man nun endlich noch von diesem 9504ten Theil nochmahl den 6ten Theil, so bekommt man den verlangten 57024sten Theil.

45.

Für diejenigen, die noch nicht mit Brüchen umzugehen wissen, zeigen sich bey dieser Art des Verfahrens Schwierigkeiten, wenn etwas übrig bleibt.

Man

Man findet aber den wahren Rest in Beziehung auf den gegebenen ganzen Divisor auf folgende Art:

54 ) : 8490
6. 9.
6) 1415
9) 157 und Rest = 2 . 6 = 12.

Die bey der letzten Division durch 9 übrig gebliebene 2 sind zwar in Beziehung auf den letzten Divisor zwey solcher Theile, deren neune aufs Ganze gehen; allein wie viel bleibt denn in Beziehung auf den gegebenen ganzen Divisor 54 übrig?

Um den wahren Rest zu erhalten, multiplicirt man die übrig gebliebene 2 in den ersten Divisor 6, so erhält man mit dem Producte den ganzen Rest, also hier 2. 6 = 12.

216) : 5148
9. 4. 5.
9) 572
4) 143
6) 23 und Rest = 5 . 4 . 9 = 180.

Hier bleibt bey der letzten Division 5 übrig, dies bezieht sich aber bloß auf den Divisor 6. Will man den Rest in Beziehung auf den ganzen Divisor wissen, so muß man diesen Rest noch ins Product der beyden ersten Divisoren, nämlich 4 . 9 multipliciren. Es ist also der ganze Rest = 5 . 4 . 9 = 180.

54 :) 8499
9. 6.
9) 944 und Rest 3.
6) 157 und Rest 2. = 2 . 9 + 3 = 21.

Hier findet man den ganzen Rest in Beziehung auf den gegebenen Divisor 54 also: Man multiplicirt den letzten Rest 2 in den ersten Divisor 9 und

nimmt zum Product den ersten Rest 3 dazu. Also ist hier der ganze Rest = 2.9+3 = 18+3 = 21.

216): 5169

9.4.6.

9) 574 und Rest 3.

4) 143 und Rest 2.

6) 23 u. Rest 5 = (5.4+2)9+3. = 201.

Hier multiplicirt man den letzten Rest 5 in den vorletzten Divisor 4, und nimmt den vorletzten Rest 2 dazu, dadurch erhält man 5.4+2 = 20+2 = 22. Diese 22 multiplicirt man in den ersten Divisor 9, und nimmt zum Product den ersten Rest 3 dazu, oder 22.9+3 = 198+3 = 201 solcher Theile, wovon 9.4.6 = 216 aufs Ganze gehen. Den Grund dieses Verfahrens findet man in der Lehre von den Brüchen.

66528): 123456789

7.8.9.11.12.

7) 17636684 und Rest 1.

8) 2204585 — — 4.

9) 244953 — — 8.

11) 22268 — — 5.

12) 1855 — — 8.

Der eigentliche Rest aber in Beziehung auf den gegebenen ganzen Divisor ist

= (((8.11+5)9+8)8+4)7+1.
= (((88+5)9+8)8+4)7+1
= ((93.98)8+4)7+1
= ((837+8)8+4)7+1
= (845.8+4)7+1
= (6760+4)7+1
= 6764.7+1 = 47349, nämlich solcher Theile, davon 66528 aufs Ganze gehen.

Ich

Ich übergehe andere Vortheile, die, weil sie größtentheils zu gekünstelt sind, eben deshalb eine angestrengte Aufmerksamkeit erfordern, und folglich die Arbeit nicht sonderlich erleichtern.

## B. In gebrochnen Zahlen.

### 1. Ueberhaupt von den Brüchen.

46.

Wenn irgend eine Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und nicht alle, sondern nur einer oder etliche Theile davon genommen werden, so hat man einen Bruch.

47.

Zur Bezeichnung eines solchen Bruchs werden also zwey Zahlen erfordert. Die eine, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile die Einheit oder das Ganze getheilt worden, heißt der Nenner; die andere aber, welche anzeigt, wie viel solcher gleichen Theile wirklich vorhanden sind, heißt der Zähler. Beyde Zahlen werden so über einander gesetzt, daß der Zähler über den Nenner zu stehen kommt, zwischen beyde aber ein Querstrich gemacht wird.

Der Bruch zwey Drittel wird geschrieben $\frac{2}{3}$, und bedeutet, daß man 2 von dem in 3 gleiche Theile getheilten Ganzen nehmen solle.

48.

Gewöhnlich ist bey einem Bruche der Zähler kleiner, als der Nenner, und wenn das ist, so heißt er ein ächter Bruch; ist aber der Zähler so groß oder noch größer als der Nenner, so heißt er ein unächter Bruch. Denn ist der Zähler und Nenner gleich groß, so hat man alle Theile, worin das

Ganze getheilt worden, folglich das Ganze oder die Einheit selbst. Daher ist überhaupt jeder solcher Bruch gleich 1. So sind z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{248}$ ächte; $\frac{7}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{65}{7}$ unächte Brüche, und von diesen ist allemahl $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$ u. s. w. $=$ 1.

49.

Der Werth eines Bruchs hängt nicht von der Größe der Zahlen ab, wodurch er ausgedruckt wird, sondern von dem Verhältniß des Zählers zum Nenner. Je öfter der Zähler im Nenner enthalten ist, desto kleiner ist der Bruch. So ist z. B. $\frac{1}{2} > \frac{4}{9}$, obgleich der letzte Bruch durch größere Zahlen ausgedruckt ist.

50.

Man hat daher ein doppeltes Mittel, einen Bruch zu vermehren oder zu vermindern. Es wird aber ein Bruch

1. Vermehrt,

a. Wenn man den Zähler wirklich vermehrt ohne den Nenner zu ändern. So ist offenbar $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$. Man erhält daher das Doppelte, Dreyfache, Vierfache ꝛc. eines Bruchs, wenn man den Zähler in 2, 3, 4 ꝛc. multiplicirt ohne mit dem Nenner eine gleiche Veränderung vorzunehmen. So ist $\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ zweymahl genommen. $\frac{12}{17} = \frac{3}{17}$ viermahl genommen.

b. Wenn man den Zähler unverändert läßt, den Nenner aber vermindert. So ist der Bruch $\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$; denn ob man gleich in beyden Fällen gleich viel, nämlich 4 Theile hat, so sind doch offenbar 4 Theile von dem nur in 5 Theile getheilten Ganzen mehr, als wenn dasselbe Ganze in 6 gleiche Theile getheilt worden. Will man daher

daher einen Bruch auf diese Art verdoppeln, daß der Zähler unverändert bleibt, so darf man nur, wenns angeht, den Nenner desselben durch 2 dividiren. Eben so erhält man den dreyfachen, vierfachen, hundertfachen Werth u. s. w. eines Bruchs, wenn man bloß dessen Nenner durch 3, 4, 100 u. s. w. dividirt. So ist $\frac{1}{2}$ doppelt so groß, als $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$ sechsmahl größer als $\frac{2}{18}$, weil im ersten Fall der Nenner 2 die Hälfte ist vom Nenner 4, im andern Fall der Nenner 3 der sechste Theil ist vom Nenner 18.

b. Wenn man nicht nur den Zähler wirklich vermehrt, sondern auch den Nenner vermindert. So ist $\frac{4}{5} > \frac{2}{10}$; denn dieser Bruch enthält nur 2 von dem in 10 gleiche Theile getheilten Ganzen, jener aber 4 Theile von dem Ganzen, welches nur in 5 gleiche Theile getheilt worden. Man erhält daher den sechsfachen Werth eines Bruchs, wenn man entweder den Zähler in 3 multiplicirt und den Nenner durch 2 dividirt, oder wenn man den Zähler in 2 multiplicirt, den Nenner aber durch 3 dividirt. So ist der 6fache Werth von $\frac{1}{12}$ gleich entweder $\frac{3}{6}$ oder $\frac{2}{4}$.

51.

2. Vermindert, entweder

a. Wenn man den Zähler des Bruchs wirklich vermindert, ohne den Nenner zu verändern. So ist z. B. $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$. Will man daher einen Bruch z. B halbiren, oder in drey, vier u. s. w. Theile theilen, so nehme man bloß vom Zähler die Hälfte oder den dritten, vierten Theil u. s. w. und lasse den Nenner unverändert. So ist $\frac{2}{5}$ die Hälfte von $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{16}$ der fünfte Theil von $\frac{15}{16}$.

b. Oder

b. Oder wenn man den Nenner des Bruchs vermehrt, ohne den Zähler desselben zu verändern. So ist z. B. $\frac{3}{6} < \frac{3}{5}$; denn drey Theile von dem in sechs gleiche Theile getheilten Ganzen sind doch offenbar weniger, als eben so viel Theile, wenn dasselbe Ganze nur in fünf gleiche Theile getheilt worden. Will man daher einen Bruch z. B. halbiren oder in 3, 4, 5 u. s. w. Theile theilen, so darf man nur den Nenner in 2, 3, 4, 5 u. s. w. multipliciren. So ist $\frac{3}{14}$ die Hälfte von $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{32}$ der vierte Theil von $\frac{5}{8}$.

c. Oder wenn man nicht nur den Zähler wirklich vermindert, sondern auch den Nenner des Bruchs vermehrt. So ist $\frac{3}{7} < \frac{5}{6}$. Man erhält daher den sechsten Theil eines Bruchs, wenn man entweder dessen Zähler durch 2 dividirt und dann den Nenner in 3 multiplicirt, oder jenen durch 3 dividirt, diesen aber alsdann in 2 multiplicirt. So ist von $\frac{12}{17}$ der der sechste Theil so wohl $\frac{6}{51}$, als auch $\frac{4}{34}$.

52.

Ein Bruch wächst also, so wie entweder der Zähler desselben vermehrt oder der Nenner vermindert wird, und nimmt ab, so wie entweder der Zähler vermindert, der Nenner aber vermehrt wird.

53.

Aus dieser Regel fließt unmittelbar folgende Bemerkung. Der Werth eines Bruchs leidet keine Veränderung, d. i. er bleibt in Ansehung seiner Größe oder seines Werths derselbe, wenn mit beyden Theilen desselben einerley Veränderung durch die Multiplication oder Division vorgenommen wird,

das

das heißt, wenn der Zähler so wohl als der Nenner gleich viel mahl entweder vermehrt oder vermindert wird. So ist z. B. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{24}$; denn durch die Multiplication des Zählers in 4 wird zwar der Bruch viermahl größer, durch die Multiplication des Nenners aber in 4 wird er auch wieder viermahl kleiner, folglich wird die Veränderung des Zählers durch dieselbe Veränderung des Nenners aufgehoben.

Eben so ist $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$; denn durch die Division des Zählers durch 3 ist der Bruch eben so vielmahl kleiner geworden, als er durch die Division des Nenners durch 3 größer geworden ist, folglich hebt auch hier die eine Veränderung die andere auf.

54.

Auf diese Bemerkung gründen sich nun folgende Veränderungen, die man, ihrem Werthe unbeschadet, mit den Brüchen vornehmen kann.

1. Das Homogenmachen der Brüche, oder die Verwandlung derselben in andere Brüche mit einerley Nennern von gleichem Werthe.

a. Wenn nur zwey Brüche gegeben sind.

α. Wenn der eine Nenner ein aliquoter Theil ist von dem andern Nenner.

Man soll z. B. $\frac{4}{7}$ und $\frac{10}{21}$ unter einerley Benennung bringen. Hier ist der Nenner 7 der dritte Theil von 21; man verwandelt also 7 in 21, wenn man 7 in 3 multiplicirt. Weil aber alsdenn der Bruch nur den dritten Theil seines Werths behalten würde, §. 51. b. so muß man auch den Zähler 4 in 3 multipliciren, damit der Bruch eben so viel mahl wieder

ver-

vermehrt wird, und er also seinen vorigen Werth wieder erhält. §. 53. Dadurch aber wird der Bruch $\frac{4}{7}$ verwandelt in $\frac{12}{21}$.

β. Wenn der eine Nenner kein aliquoter Theil von dem andern.

Man habe z. B. die beyden Brüche $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{9}$ unter einerley Benennung zu bringen. In diesem Fall multiplicirt man beyde Theile eines jeden Bruchs in den Nenner des andern, dann wird aus $\frac{4}{7}$ der Bruch $\frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{36}{63}$, und aus $\frac{5}{9}$ der Bruch $\frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63}$.

55.

b. Wenn mehrere Brüche gegeben sind, und zwar

α. Wenn der größte Nenner so beschaffen ist, daß jeder Nenner der übrigen Brüche ein aliquoter Theil von demselben ist, d. i. ein solcher Theil, der sich durch eine ganze Zahl ausdrucken läßt.

In diesem Fall verfährt man nach §. 54. α. So lassen sich z. B. folgende Brüche $\frac{7}{18}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{9}$ insgesammt in Achtzehntel verwandeln. Aus 3 wird 18, wenn man 3 in 6, aus 6 wird 18, wenn man 6 in 3, aus 9 wird 18, wenn man 9 in 2 multiplicirt, dann muß aber auch der Zähler 2 in 6, 5 in 3, und 4 in 2 multiplicirt werden, und dann heißen die Brüche $\frac{7}{18}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{8}{18}$.

β. Wenn der größte Nenner kein Multiplum ist von jedem Nenner der übrigen Brüche; dann kann man

aa. entweder beyde Theile eines jeden Bruchs ins Product der übrigen Nenner multipliciren. Z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$.

Hier

Hier wird $\frac{1}{2}$ verwandelt in $\frac{1.3.4.9}{2.3.4.9} = \frac{1.108}{2.108} = \frac{108}{216}$.

$\frac{2}{3}$ in $\frac{2.2.4.9}{3.2.4.9} = \frac{2.72}{3.72} = \frac{144}{216}$.

$\frac{3}{4}$ in $\frac{3.2.3.9}{4.2.3.9} = \frac{3.54}{4.54} = \frac{162}{216}$.

$\frac{5}{9}$ in $\frac{5.2.3.4}{9.2.3.4} = \frac{5.24}{9.24} = \frac{120}{216}$.

bb. Oder man dividirt das Product aller Nenner durch den Nenner eines jeden Bruchs, und multiplicirt den erhaltenen Quotienten in den Zähler desselben Bruchs. Die kommenden Producte sind dann die neuen Zähler zu dem gemeinschaftlichen Nenner, den man durch die Multiplication aller Nenner in einander erhalten hat.

Es sollen z. B. folgende Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{5}{6}$ unter einerley Benennung gebracht werden. Man setze die gegebenen Brüche unter einander, ziehe daneben rechter Hand eine senkrechte Linie, und setze das Product der Nenner aller Brüche — hier $7 . 4 . 3 . 6 = 504$ — über die Linie folgender gestalt: 504

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{5}{7}$ | 72 | 360 | nämlich 504tel. |
| $\frac{3}{4}$ | 126 | 378 | — — |
| $\frac{1}{3}$ | 168 | 168 | — — |
| $\frac{5}{6}$ | 84 | 420 | — — |

Man hat also anstatt der Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{5}{6}$ folgende Brüche $\frac{360}{504}$, $\frac{378}{504}$, $\frac{168}{504}$ und $\frac{420}{504}$ von gleichem Werth mit den gegebenen, aber mit einerlei Nenner erhalten.

## Anmerkung.

Die Arbeit wird merklich abgekürzt, wenn einer und der andere größere Nenner durch einen und den

andern

andern kleineren ohne Rest dividirt werden kann; denn in diesem Fall fällt bey Suchung des gemeinschaftlichen Nenners die Multiplication in solchen kleinern Nenner weg. So hätte in dem letzten Exempel die Multiplication in 3 wegfallen können, weil sich der Nenner 6 durch 3 ohne Rest theilen läßt, und dann hätte man nur das Product aus $7 \cdot 4 \cdot 6 = 168$ zum gemeinschaftlichen Nenner erhalten. Man soll z. B. folgende fünf Brüche gleichnahmig machen: $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{12}$ und $\frac{1}{4}$. Weil sich der Nenner 12 durch 3, 2 und 4 ohne Rest dividiren läßt, so erhält man den gemeinschaftlichen Nenner mit dem Product der beyden Nenner $7 \cdot 12 = 84$.

84

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{5}{7}$ | 12 | — | $\frac{60}{84}$ |
| $\frac{2}{3}$ | 28 | — | $\frac{56}{84}$ |
| $\frac{1}{2}$ | 42 | — | $\frac{42}{84}$ |
| $\frac{11}{12}$ | 7 | — | $\frac{77}{84}$ |
| $\frac{1}{4}$ | 21 | — | $\frac{21}{84}$ |

56.

2. Die Abbreviation der Brüche, oder wenn Brüche, die aus großen Zahlen bestehen, ohne Abbruch ihres Werths in andere verwandelt werden, die aus den möglichst kleinsten Zahlen bestehen, oder die zu ihrem Nenner eine bestimmte kleinere Zahl haben sollen. Man pflegt dies auch das Heben der Brüche zu nennen.

Man sucht in solchem Fall eine Zahl, durch welche sich Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs ohne Rest theilen lassen. Zu desto leichterer Auffindung einer solchen Zahl dienen folgende Bemerkungen.

a. Be-

a. Bestehen beyde Theile des Bruchs oder auch nur der eine aus einer ungeraden Zahl, so läßt sich der Bruch nur durch eine ungerade Zahl heben, z. B.

| 27 | |
|---|---|
| 27 | 1 |
| 81 | 3 |

| 11 | |
|---|---|
| 77 | 7 |
| 198 | 18 |

| 3 | |
|---|---|
| 12 | 4 |
| 15 | 5 |

b. Sind beyde Theile gerade Zahlen, so läßt sich der Bruch allemahl wenigstens durch 2 heben, z. B.

| 2 | |
|---|---|
| 12 | 6 |
| 22 | 11 |

| 2 | |
|---|---|
| 6 | 3 |
| 14 | 7 |

c. Ist die letzte Zahl rechter Hand in beyden Theilen 5, so läßt sich der Bruch durch 5 oder durch ein ungerades Multiplum von 5 heben, z. B.

| 5 | |
|---|---|
| 25 | 5 |
| 45 | 9 |

| 15 | |
|---|---|
| 75 | 5 |
| 165 | 11 |

d. Endigen sich beyde Theile mit einer oder mehrern Nullen, so läßt sich der Bruch allemahl durch 10 oder 100 u. s. w. heben, oder man streicht von beyden Theilen gleich viel Nullen weg, z. B.

| 10 | |
|---|---|
| 30 | 3 |
| 50 | 5 |

| 100 | |
|---|---|
| 200 | 2 |
| 1500 | 15 |

$\frac{3\text{ø}\text{ø}}{7\text{ø}\text{ø}} = \frac{3}{70}$

e. Endigt sich der eine Theil mit 5, der andere mit 0, so läßt sich der Bruch allemahl durch 5 heben, z. B.

| 5 | | 5 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 20 | 4 | 225 | 45 |
| 30 | 6 | 25 | 5 | 320 | 64 |

f. Ist das Collect der Ziffern eines jeden Theils vom Bruch = 3 oder ein Factum aus 3, so läßt sich der Bruch durch 3 heben. Z. B. $\frac{723}{2001}$ läßt sich durch 3 heben, weil im Zähler $7 + 2 + 3 = 12 = 4 . 3$, im Nenner $2 + 1 = 3$ ist, also

| 3 | | 3 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 723 | 241 | 111 | 37 | 102 | 34 |
| 2001 | 667 | 123 | 41 | 201 | 67 |

g. Ist das Collect der Ziffern eines jeden Theils vom Bruch = 9 oder ein Factum aus 9, so kann der Bruch durch 9 gehoben werden. So muß sich $\frac{162}{945}$ durch 9 heben lassen, weil im Zähler $1 + 6 + 2 = 9$, im Nenner $9 + 4 + 5 = 18 = 2 . 9$ ist.

| 9 | 3 | | 9 | | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 162 | 18 | 6 | 126 | 14 | 216 | 24 |
| 945 | 105 | 35 | 954 | 106 | 549 | 61 |

| 9 | |
|---|---|
| 1234566 | 137174 |
| 2468007 | 274223 |

h. Besteht eine Zahl aus drey Ziffern, so daß die mittlere allemahl so groß ist, als die erste und letzte zusammengenommen, so läßt sich die Zahl allemahl durch 11 ohne Rest dividiren, und der Quotient besteht immer aus der ersten und letzten Zahl, z. B.

| 11 | | 11 | | 11 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 132 | 12 | 561 | 51 | 198 | 18 | 2 |
| 583 | 53 | 275 | 25 | 891 | 81 | 9 |

i. Lassen sich die beyden letzten Ziffern einer Zahl durch 4 ohne Rest theilen, so läßt sich auch die ganze Zahl durch 4 ohne Rest theilen.

| 4 | | 4 | |
|---|---|---|---|
| 6748 | 1687 | 1357964 | 339491 |
| 7324 | 1831 | 9753172 | 2438293 |

k. Wenn sich keine von diesen Regeln anwenden läßt, oder wenn man sogleich den möglich größten Theiler verlangt, so dividirt man den Nenner des zu hebenden Bruchs durch dessen Zähler, bleibt dann ein Rest, so dividirt man denselben durch den vorigen Divisor, und fährt damit so lange fort, bis bey irgend einer Division endlich kein Rest bleibt, dann ist der letzte Divisor diejenige Zahl, durch welche sich beyde Theile des Bruchs ohne Rest theilen lassen. Man will z. B. den Bruch $\frac{1233792}{3036285}$ durch die möglich größte Zahl auf einmahl heben. Man dividire daher

α. 3036285 durch 1233792, so bleibt übrig 568701
β. 1233792 durch 568701, so bleibt übrig 96390.
γ. 568701 durch 96390, so bleibt übrig 86751.
δ. 96390 durch 86751, so bleibt übrig 9639.
ε. 86751 durch 9639, so bleibt übrig 0.

Es ist also die Zahl 9639 der gemeinschaftliche Divisor.

| 9639 | |
|---|---|
| 1233792 | 128 |
| 3036285 | 315 |

Anmerkung.

Wenn endlich bey wiederholter Division Eins übrig bleibt, so giebts keine Zahl, durch welche sich der Bruch heben läßt, weil dann entweder der eine von beyden Theilen, oder alle beyde Theile so genannte Primzahlen sind.

57.

3. Das Einrichten gemischter Zahlen, d. i. solcher Zahlen, die aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch bestehen.

Man kann jede ganze Zahl in einen Bruch verwandeln, wenn man derselben 1 zum Nenner giebt. So ist $2 = \frac{2}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$ u. s. w. Soll nun z. B. die vermischte Zahl $6\frac{3}{4}$ eingerichtet werden, so verwandele man $6\frac{3}{4}$ in $\frac{6}{1} + \frac{3}{4}$. Die beyden Brüche mache man nun zuförderst homogen §. 54, indem man $\frac{6}{1}$ auch in Viertel verwandelt. Man multiplicirt zu dem Ende Zähler und Nenner in 4, dadurch erhält man $\frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{24}{4}$, und nun ist $\frac{6}{1} + \frac{3}{4} = \frac{24}{4} + \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$. Hieraus ergiebt sich folgende Regel:

Man multiplicire die ganze Zahl in den Nenner des damit verbundenen Bruchs, und thue den Zähler zum Product hinzu, so ist die Summe der neue Zähler zu dem vorhandenen Nenner. So ist

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$6\frac{7}{18} = \frac{6 \cdot 18 + 7}{18} = \frac{108 + 7}{18} = \frac{115}{18}$$

Anmerkung.

Ist der Zähler eines Bruchs größer als sein Nenner, so läßt er sich durch die Division des Zählers durch den Nenner allemahl in eine vermischte

Zahl

Zahl verwandeln. So ist z. B. $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$. $\frac{115}{18} = 6\frac{7}{18}$. $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$. $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$.

## 2. Besonders die vier Rechnungsarten in Brüchen. § 46.

### 1. Das Addiren.

58.

**1. Wenn die Brüche gleiche Nenner haben.**

Man addirt bloß die Zähler und giebt der Summe, als dem neuen Zähler, den Nenner, den die zu addirenden Brüche hatten. Ist dann dieser erhaltene Zähler größer, als der Nenner, so dividirt man jenen durch diesen, um zu erfahren, wie viel Ganze in der Summe der gegebenen Brüche enthalten sind. So ist z. B. $\frac{5}{11} + \frac{8}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11} = \frac{5+8+3+4+7}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11}$.

59.

**2. Wenn die Nenner der zu summirenden Brüche verschieden sind.** In diesem Fall werden

Alle Brüche vor allen Dingen unter einerlei Benennung gebracht nach §. 54.

Dann werden die neu erhaltenen Zähler addirt, und ihrer Summe wird der gefundene gemeinschaftliche Nenner gegeben nach § 58.

a. Wenn der größte Nenner zugleich auch der Hauptnenner ist.

Welches ist z. B. die Summe von $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{5}{12}$? $2\frac{2}{3}$.

12

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | 4 | — | 8 | nämlich | 12tel. |
| $\frac{3}{4}$ | 3 | — | 9 | — | — |
| $\frac{5}{6}$ | 2 | — | 10 | — | — |
| $\frac{5}{12}$ | 1 | — | 5 | — | — |

$\frac{32}{12} = 2\frac{8}{12} = 2\frac{2}{3}$.

Auf gleiche Art findet man die Summe von $\frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{19}{24} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 3\frac{5}{8}$.

Die Summe von $\frac{49}{52} + \frac{6}{13} + \frac{95}{104} + \frac{19}{26} = 3\frac{5}{104}$

Die Summe von $\frac{6}{7} + \frac{389}{420} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{3}{4} = 4$.

60.

b. Wenn der gemeinschaftliche Hauptnenner erst gesucht werden muß.

Man verfahre hier nach §. 54. β. und §. 55. β. Man soll z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{2}{5}$ addiren. Hier ist der Hauptnenner $= 8.9.5 = 360$.

360

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{8}$ | 45 | — | 135 | nämlich | 360stel. |
| $\frac{7}{9}$ | 40 | — | 280 | — | — |
| $\frac{2}{5}$ | 72 | — | 144 | — | — |

$\frac{559}{360} = 1\frac{199}{360}$

Auf gleiche Art findet man die Summe folgender Brüche.

$\frac{7}{12} + \frac{4}{15} + \frac{6}{85} + \frac{4}{5} + \frac{5}{7} = 2\frac{207}{4760}$

$\frac{15}{16} + \frac{8}{9} + \frac{11}{12} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 5\frac{125}{144}$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{9}{10} + \frac{11}{12} + \frac{13}{14} + \frac{15}{16} = 6\frac{359}{560}$

61.

Bey vermischten Zahlen werden erst die Brüche addirt, und die in ihrer Summe etwa enthaltenen Ganzen zur Summe der übrigen ganzen Zahlen, mit welchen die Brüche verbunden sind, gethan.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | | | 7956 | |
| $8\frac{5}{7}$ | $15\frac{2}{3}$ | 6 – 12 | $65\frac{8}{9}$ | 884 — | 7072 |
| $3\frac{4}{9}$ | $9\frac{1}{2}$ | 9 – 9 | $13\frac{7}{13}$ | 612 — | 4284 |
| $9\frac{2}{7}$ | $20\frac{5}{6}$ | 3 – 15 | $8\frac{11}{12}$ | 663 — | 7293 |
| $20\frac{11}{7} = 21\frac{4}{7}$ | $38\frac{7}{18}$ | 1 – 7 | $25\frac{5}{17}$ | 468 — | 2340 |
| $84\frac{7}{18}$ | $\frac{43}{18} = 2\frac{7}{18}$. 111 | | | | 20989 |
| | | | | | 7956 |

zusammen $113\frac{5077}{7956}$.

Exempel zum Nachrechnen.

$2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{4}{5} + 5\frac{6}{7} = 16\frac{173}{210}$

$9\frac{3}{4} + 8\frac{2}{5} + 7\frac{9}{13} = 25\frac{2189}{260}$

$3\frac{4}{5} + 12\frac{1}{3} + 9\frac{3}{4} = 25\frac{53}{60}$

## 2. Das Subtrahiren.

### 62.

### 1. Wenn die Brüche einerley Nenner haben.

#### a. Wenn der Subtrahendus kleiner ist als der Minuendus.

Man zieht den Zähler des Subtrahendus ab vom Zähler des Minuendus, und giebt dem Rest, als neuen Zähler, den vorhandenen Nenner, z. B.

| | | |
|---|---|---|
| Minuendus | $\frac{8}{11}$ | $25\frac{13}{16}$ |
| Subtrahendus | $\frac{5}{11}$ | $12\frac{9}{16}$ |
| Rest | $\frac{3}{11}$ | $13\frac{4}{16} = 13\frac{1}{4}$. |

### 63.

#### b. Wenn der Minuendus kleiner ist als der Subtrahendus.

Man vermehrt in diesem Fall den Bruch des Minuendus um ein Ganzes, und zerfällt es in so viel Theile, als der Nenner des Bruchs Einheiten hat.

Dann zieht man den Subtrahendus ab von dem um ein Ganzes vermehrten Minuendus.

Wegen des zum Bruch des Minuendus genommenen Ganzen vermehrt man die ganze Zahl des Subtrahendus gleichfalls um Eins, und zieht, wie gewöhnlich, ab, z. B.

$$\begin{array}{r} 25\frac{5}{12} \\ 10\frac{11}{12} \\ \hline \end{array}$$

$$14\frac{6}{12} = 14\frac{1}{2}.$$

Weil $\frac{11}{12}$ größer ist als $\frac{5}{12}$, so vermehre man $\frac{5}{12}$ um ein Ganzes, und zerfälle es in 12 Theile, nehme aber alle 12 Theile, d. i. man nehme $\frac{12}{12}$ zu $\frac{5}{12}$, das machen $\frac{17}{12}$, und nun ziehe man $\frac{11}{12}$ ab von $\frac{17}{12}$, so bleiben $\frac{6}{12}$ oder $\frac{1}{2}$.

Allein wegen der zu $\frac{5}{12}$ genommenen $\frac{12}{12}$ oder 1 vermehre man nun auch den Subtrahendus 10 um 1, das sind 11, und diese 11 von 25 genommen, bleiben übrig 14. Also ist der ganze Rest $14\frac{1}{2}$.

Oder man setze in solchem Fall die Differenz der Brüche mit dem Zeichen (—) Minus oder weniger in die Stelle des Rests, und ziehe dann diese Bruchdifferenz ab von der Differenz der ganzen Zahlen, z. B.

$$\begin{array}{r} 25\frac{5}{12} \\ 10\frac{11}{12} \\ \hline \end{array}$$

$$15 - \frac{6}{12} = 15 - \frac{1}{2} = 14\frac{1}{2}.$$

Denn soll man $\frac{11}{12}$ von $\frac{5}{12}$ wegnehmen, so hat man $\frac{6}{12}$ zu wenig, also ist der Rest $-\frac{6}{12}$, und 10 von 25 bleiben 15. Also ist der Rest $15 - \frac{6}{12}$.

$$15 - \frac{6}{12} = 14 + \frac{12}{12} - \frac{6}{12}$$

$$14 + \frac{12}{12} - \frac{6}{12} = 14 + \frac{6}{12} = 14 + \frac{1}{2} = 14\frac{1}{2}.$$

64.

2. Wenn die Brüche verschiedene Nenner haben.

a. Wenn der größere Nenner zugleich der Hauptnenner ist.

Man

Man verwandelt den Bruch mit dem kleinen Nenner in einen solchen Bruch, dessen Nenner dem Nenner des andern Bruchs gleich ist, nach §. 54. α, und verfährt dann auf die vorige Art. Z. B.

$$\begin{array}{r|l} 17\frac{9}{15} & 1 - \frac{9}{15} \\ 8\frac{2}{5} & 3 - \frac{6}{15} \\ \hline 9\frac{1}{5} & \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 10\frac{5}{12} & 1 - \frac{5}{12} \\ 6\frac{3}{4} & 3 - \frac{9}{12} \\ \hline 3\frac{2}{3} & 1\frac{8}{12} = \frac{2}{3}. \end{array}$$

Oder das zweyte Exempel auf die andere Art.

$$\begin{array}{r|l} 10\frac{5}{12} & 1 - \frac{5}{12} \\ 6\frac{3}{4} & 3 - \frac{9}{12} \\ \hline 4 \text{ weniger } \frac{4}{12} \text{ oder } \frac{1}{3} & \end{array}$$

$$4 = 3 + 1$$

$$1 = \frac{3}{3}$$

Also $3 + \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$.

65.

b. Wenn der Hauptnenner erst muß gesucht werden.

Dies geschieht nach §. 54. β.

$$\begin{array}{r|l} 8\frac{3}{4} & 7 - \frac{21}{28} \\ 4\frac{3}{7} & 4 - \frac{12}{28} \\ \hline 4\frac{9}{28} & \frac{9}{28} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 16\frac{3}{5} & 8 - \frac{24}{40} \\ 7\frac{7}{8} & 5 - \frac{35}{40} \\ \hline 9 \text{ weniger } \frac{11}{40} & \end{array}$$

$$9 = 8 + 1$$

$$1 = \frac{40}{40}$$

F. $8 + \frac{40}{40} - \frac{11}{40} = 8 + \frac{29}{40} = 8\frac{29}{40}$.

3. Das Multipliciren.

66.

1. Wenn beyde Factoren ächte Brüche sind.

Man multiplicire Zähler in Zähler, und Nenner in Nenner, so erhält man mit dem ersten Product

den Zähler, mit dem andern den Nenner eines Bruchs, der das Product der beyden in einander zu multiplicirenden Brüche enthält. Man soll z. B. $\frac{4}{5}$ in $\frac{7}{8}$ multipliciren.

Das Product ist $= \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$.

### Beweis.

Den Bruch $\frac{4}{5}$ in $\frac{7}{8}$ multipliciren, heißt so viel, als von dem Bruch $\frac{4}{5}$ den achten Theil sieben mahl nehmen.

Nun ist der achte Theil von $\frac{4}{5} = \frac{4}{8 \cdot 5} = \frac{4}{40}$, und diesen achten Theil soll man 7 mahl nehmen, also $\frac{4 \cdot 7}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$.

### Anmerkungen.

1. Es ist gleichviel, ob man $\frac{4}{5}$ in $\frac{7}{8}$ oder $\frac{7}{8}$ in $\frac{4}{5}$ multiplicirt; das Product ist in beyden Fällen dasselbe. Denn soll man $\frac{7}{8}$ in $\frac{4}{5}$ multipliciren, so heißt dies so viel, als von dem Bruch $\frac{7}{8}$ den 5ten Theil 4 mahl nehmen. Es ist aber der 5te Theil von $\frac{7}{8} = \frac{7}{8 \cdot 5} = \frac{7}{40}$, und diesen 4mahl genommen, macht $\frac{7 \cdot 4}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$, wie vorhin.

2. Man sieht zugleich hieraus, daß das Product zweyer ächten Brüche allemahl kleiner seyn müsse, als jeder der Factoren. Denn soll man $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ multipliciren, so heißt dies so viel, als man soll den Bruch $\frac{1}{2}$ nicht ganz oder einmahl, sondern nur die Hälfte davon nehmen, nun aber ist die Hälfte von $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Eben so auch, wenn man den Bruch $\frac{4}{5}$ in $\frac{7}{8}$ multipliciren soll. Da $\frac{7}{8}$ kleiner ist als 1, so muß auch weniger als $\frac{4}{5}$ zum Product heraus kommen. Und soll man $\frac{7}{8}$ in $\frac{4}{5}$ multipliciren, so heißt das

wieder

wieder den Bruch $\frac{7}{8}$ nicht ganz, sondern nur den 5ten Theil davon 4mahl nehmen, es muß daher auch wieder weniger als $\frac{7}{8}$ zum Product heraus kommen. Das Product aber war $\frac{7}{10}$, und dies ist wirklich kleiner als $\frac{4}{5}$ und auch kleiner als $\frac{7}{8}$.

67.

2. Wenn der eine Factor ein ächter Bruch, der andere aber eine ganze Zahl ist.

Will man hier nach der vorigen Regel §. 66. verfahren, so verwandele man die ganze Zahl auch in einen Bruch, indem man ihm zum Nenner die 1 giebt. Man soll z. B. $\frac{1}{2}$ in 4 multipliciren.

Da $4 = \frac{4}{1}$ §. 57. so multiplicire man $\frac{1}{2}$ in $\frac{4}{1}$. Nun ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} =$ §. 66.

Eben so ist auch 5 multiplicirt in $\frac{3}{4} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Beweis.

$\frac{1}{2}$ viermahl genommen ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Und 5 Dreiviertelmahl genommen, heißt von 5 den vierten Theil $= \frac{5}{4}$ dreimahl genommen, oder $\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Anmerkungen.

1. Die erste Bemerkung §. 66. bestätigt sich auch hier. Denn es ist gleichviel, ob man $\frac{1}{2}$ viermahl, oder ob man 4 ein halb mahl das heißt von 4 die Hälfte nimmt. In beiden Fällen kommt 2 zum Product. Eben so macht $\frac{3}{4}$ fünfmahl genommen eben so wohl $\frac{15}{4}$, als 5 dreiviertelmahl genommen.

2. Ist der Nenner des Bruchs ein Multiplum von der ganzen Zahl, in die der Bruch multiplicirt werden soll, so erhält man das verlangte Product, wenn man den Nenner des Bruchs durch die ganze

Zahl

Zahl dividirt, der Quotient aber wird dann der neue Nenner zum vorigen Zähler. Dies fließt aus §. 50. b. So ist z. B. $\frac{7}{16}$ multiplicirt in $4 = \frac{7}{16:4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$. Und $\frac{18}{25}$ multiplicirt in 5 ist $= \frac{18}{25:5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

3. Ist der Nenner des Bruchs der ganzen Zahl gleich, in die der Bruch multiplicirt werden soll, so kommen so viel Ganze heraus, als der Zähler des Bruchs Einheiten hat; denn in diesem Falle wird der Zähler durch einerlei Zahl dividirt und multiplicirt, folglich die Division durch die Multiplication aufgehoben. II. §. 19. So ist z. B. $\frac{6}{7}$ multiplicirt in $7 = 6$; denn $\frac{6}{7}$ siebenmahl genommen, machen $\frac{42}{7}$, dies aber sind 6 Ganze.

4. Ist der Nenner des Bruchs ein aliquoter Theil vom gegebenen ganzen Factor, so dividire man diesen Factor durch den Nenner des Bruchs, und multiplicire dessen Zähler in den erhaltenen Quotienten. In diesem Fall erhält man auch allemahl lauter Ganze zum Product. So sind z. B. $\frac{6}{7}$ multiplicirt in $21 = 6. \frac{21}{7} = 6.3 = 18$.

68.

3. Wenn einer oder beide Factoren vermischte Zahlen sind.

Man verwandelt die vermischten Zahlen durchs so genannte Einrichten § 57 in unächte Brüche und verfährt denn nach einer der bisher angeführten Arten. Man soll z. B. $3\frac{6}{7}$ in $\frac{4}{5}$ multipliciren.

Man verwandle $3\frac{6}{7}$ in $\frac{3.7+6}{7} = \frac{21+6}{7} = \frac{27}{7}$, und multiplicire nun $\frac{27}{7}$ in $\frac{4}{5}$ macht $\frac{27.4}{7.5} = \frac{108}{35} = 3\frac{3}{35}$.

Eben so ist $\frac{2}{3}.8\frac{4}{7} = \frac{2}{3}.\frac{60}{7} = \frac{120}{21} = 5\frac{15}{21} = 5\frac{5}{7}$.

Des-

Desgleichen $2\frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{13}{5} \cdot 10 = 26$.
Desgleichen $9 \cdot 6\frac{4}{11} = 9 \cdot \frac{70}{11} = \frac{630}{11} = 57\frac{3}{11}$.
Desgleichen $\frac{9\frac{1}{3} \cdot 10\frac{5}{7}}{2\frac{8}{3} \cdot \frac{75}{7}} = \frac{4 \cdot 75}{3} = 4 \cdot 25 = 100$.

69.

4. Sollen mehr als zwei Factoren in einander multiplicirt werden, so gilt auch hier die Regel: Man multiplicire alle Zähler desgleichen alle Nenner in einander. Ist einer oder der andere Factor eine ganze oder vermischte Zahl, so verwandele man beide in unächte Brüche nach §. 57. z. B.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{5}{16}$.
Desgleichen $\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$.
Desgleichen $\frac{.6 \cdot \frac{3}{5} \cdot 4\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{6}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{39}{8} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 39 \cdot 2}{1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 39}{5 \cdot 4} = \frac{234}{20}$
$= 11\frac{14}{20} = 11\frac{7}{10}$.
Desgleichen $\frac{2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 30}{\frac{5}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{30}{1}} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 24 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1} = 5 \cdot 11 \cdot 24$.
$= 1320$.

## 4. Das Dividiren.

70.

1. Wenn der Dividendus ein ächter Bruch, der Divisor aber eine ganze Zahl ist.

Man dividirt entweder wirklich den Zähler des Dividendus durch den gegebenen Divisor, oder man multiplicirt den Nenner in den Divisor. Man erhält in jedem Fall den verlangten Quotienten.

Man soll z. B. $\frac{4}{7}$ dividiren durch 2.

Dividendus. Divisor. Quotient.

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}.$$

oder $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5.2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$

Beweis.

Den Bruch $\frac{4}{5}$ durch 2 dividiren heißt so viel, als den zweiten Theil oder die Hälfte von $\frac{4}{5}$ suchen. Es ist klar, daß der zweite Theil oder die Hälfte kleiner seyn müsse, als der Dividendus $\frac{4}{5}$ selbst. Man kann aber einen Bruch kleiner machen theils durch wirkliche Verminderung des Zählers §. 51. a; theils durch Vermehrung des Nenners §. 51. b. Folglich erhält man die Hälfte von $\frac{4}{5}$, wenn man entweder den Zähler wirklich durch 2 dividirt, oder den Nenner in den Divisor 2 multiplicirt. Die jedesmahlige Beschaffenheit der Zahl bestimmt, auf welche Art man bei jedem vorkommenden Fall den Quotienten am bequemsten finden könne.

71.

2. Wenn beide, Dividendus und Divisor, ächte Brüche sind.

Man kehre den Divisor um, und mache den Nenner zum Zähler, und den Zähler zum Nenner. Hierdurch verwandelt man die Division in Multiplication, indem man alsdenn ganz nach §. 66. verfährt.

a. Wenn die Nenner verschieden sind.

Man soll z. B. $\frac{3}{4}$ dividiren durch $\frac{1}{2}$. Dies wird so ausgedrückt:

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3.2}{4.1.} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}.$$

Anmerkung.

So wie die Multiplication zweier ächten Brüche in einander allemahl ein Product gab, welches kleiner war, als jeder der Factoren §. 66.

Anm.

Anm. 2. so ist bei der Division zweier ächten Brüche durch einander der Quotient allemahl grösser, als der Dividendus und Divisor. Denn dividirt man eine Zahl durch eine andere, welche gröſser ist als 1, so muß man natürlicher Weise einen Quotienten erhalten, der kleiner ist als die die dividirte Zahl. Wollte man aber eben dieselbe Zahl durch 1 dividiren, so würde der Quotient gleich seyn dem Dividendus; dividirt man sie aber durch eine Zahl, die kleiner ist als 1, d. i. durch einen ächten Bruch, so muß nothwendig der Quotient gröſser seyn, als der Dividendus. So ist z. B.

$\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{7}$ Hier ist der Quotient $\frac{3}{7} < \frac{6}{7}$
$\frac{6}{7} : 1 = \frac{6}{7}$ — — — $\frac{6}{7} = \frac{6}{7}$
$\frac{6}{7} : \frac{1}{2} = \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{1} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$. — — — $1\frac{5}{7} > \frac{6}{7}$

} Dividend.

Es wird auch auf folgende Art begreiflich. Je kleiner der Divisor ist, desto gröſser fällt bei einerlei Dividendus der Quotient aus, das heißt: desto öfter ist der Divisor im Dividendus enthalten. Bleibt nun bei der Division einer Zahl durch 1 der Dividendus unverändert, so muß bei der Division derselben durch einen Divisor, der kleiner ist als 1, d. i. durch einen ächten Bruch der Quotient nothwendig gröſser ausfallen, als der Dividendus.

## 72.

### b. Wenn die Brüche einerlei Nenner haben.

Hier dividirt man den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors, so erhält man den Quotienten. Es wird also hier auf den Nenner keine Rücksicht genommen. Man soll z. B. $\frac{6}{11}$ dividiren durch $\frac{3}{11}$.

$$\frac{6}{11} : \frac{3}{11} = 6 : 3 = 2.$$

Beweis.

Beweis.

$\frac{6}{11} : \frac{3}{11} = \frac{6}{11} \cdot \frac{11}{3}$ §. 71.

$\frac{6}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{6}{3}$

$\frac{6}{3} = 2$

---

F. $\frac{6}{11} : \frac{3}{11} = 2$.

Eben so ist $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$.

und $\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = 4 : 3 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Ein anderer Beweis.

Offenbar muß in diesem Fall der Divisor im Dividendus so oft enthalten seyn, als der Zähler des Divisors im Zähler des Dividendus enthalten ist, weil die Brüche $\frac{6}{11}$ und $\frac{3}{11}$ eben das Verhältniß gegen einander haben, welches zwischen den ganzen Zahlen 6 und 3 Statt findet.

73.

5. Wenn der Dividendus eine ganze Zahl, der Divisor aber ein ächter Bruch ist.

Man verwandle die ganze Zahl des Dividendus in einen unächten Bruch, indem man ihr zum Nenner 1 giebt, und verfahre dann nach §. 71. Man soll z. B. die Zahl 8 dividiren durch $\frac{3}{4}$.

$8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{1} : \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8.4}{1.3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$.

Beweis.

Soll man 8 durch $\frac{3}{4}$ dividiren, so heißt dies so viel, als den dritten Theil von 8 viermahl nehmen. Weil nun bei einem ächten Bruch der Nenner allemahl größer ist als der Zähler, so wird begreiflich, woher es komme, daß auch hier der Quotient größer ausfällt als der Dividendus.

Eben so ist $9 : \frac{3}{4} = \frac{9}{1} : \frac{3}{4} = \frac{9}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9.4}{3} = \frac{36}{3} = 12$.

Desgleichen $12 : \frac{7}{8} = 13\frac{5}{7}$. und $16 : \frac{4}{5} = 20$.
und $18 : \frac{2}{3} = 27$. und $24 : \frac{3}{4} = 32$.
und $100 : \frac{1}{2} = 200$. und $100 : \frac{5}{6} = 120$.

74.

4. Wenn vermischte Zahlen durch ächte Brüche, ganze oder vermischte Zahlen sollen dividiret werden.

Die vermischten Zahlen verwandelt man durchs so genannte Einrichten §. 57, die ganzen Zahlen aber, indem man ihnen zum Nenner 1 giebt, in unächte Brüche. Doch kann man auch in manchen Fällen des Einrichtens überhoben seyn. Uebrigens verfahre man nach §. 71.

Z. B. $6\frac{2}{3} : 2 = \frac{20}{3} : \frac{2}{1} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{20 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$.
oder man dividire erst 6 durch 2, der Quotient ist $= 3$, dann $\frac{2}{3}$ halb genommen ist $\frac{1}{3}$, folglich der ganze Quotient $= 3\frac{1}{3}$.
Desgleichen $7\frac{3}{5} : \frac{4}{9} = \frac{38}{5} : \frac{4}{9} = \frac{38}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{342}{20} = 17\frac{1}{10}$.
Desgleichen $2\frac{5}{7} : 3\frac{1}{2} = \frac{19}{7} : \frac{7}{2} = \frac{19}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{38}{49}$.
Desgleichen $3\frac{1}{2} : 2\frac{5}{7} = \frac{7}{2} : \frac{19}{7} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{19} = \frac{49}{38} = 1\frac{11}{38}$.

## II. Die vier Rechnungsarten in benannten so wohl ganzen als gebrochnen Zahlen.

75.

Unter benannten Zahlen versteht man solche, wodurch die Anzahl gewisser genannten Dinge angedeutet wird. Im Grunde nun ist die Art, solche benannte Zahlen nach den vier Rechnungsarten zu verändern, mit derjenigen einerlei, welche bisher bei den unbenannten Zahlen beobachtet worden ist, nur ist hier mit dem bekannten Gesetz, nach welchen zehen Einheiten einer niedrigern Klasse eine Einheit der nächst folgenden höhern Klasse ausmachen, noch

ein anderes Gesetz, nach welchem eine gewisse Anzahl Einheiten einer niedern Benennung einer Einheit der nächst folgenden höhern Benennung gleich ist, verbunden. Weiß man nun, wie viel Einheiten von der niedern Benennung in jedem besondern Fall auf eine Einheit der nächst höhern Benennung gerechnet werden, so ist mit den vier Rechnungsarten in benannten Zahlen weiter keine Schwierigkeit verbunden. Zu dem Ende ist nöthig, daß man sich vornehmlich in Ansehung der einheimischen Münzsorten, Maße, Gewichtsarten u. s. w. das Gesetz bekannt mache, nach welchem die Einheit einer höhern Benennung aus den Einheiten der nächst niedern Benennung von eben der Art entsteht. In Ansehung der Auswärtigen aber muß man solche Tabellen bei der Hand haben, in welchen dies Gesetz bestimmt ist, und dahin gehört unter andern der kleine Contorist.

## 1. Das Addiren.

### 76.

Man merke hier folgende allgemeine Regeln.

1. Die Zahlen, oder Größen, die addirt werden sollen, müssen gleichartig seyn, denn man kann z. B. eine Anzahl Menschen und eine Anzahl Pferde nicht addiren, so daß man mit der Summe so viel Menschen, oder so viel Pferde erhielte, als beyde einzelne Zahlen zusammen Einheiten enthalten. 10 Menschen und 10 Pferde sind weder 20 Menschen noch 20 Pferde.
2. Wenn Dinge einer Art unter verschiedenen Benennungen vorkommen, so ordne man die Zahlen so, daß die mit den höhern Benennungen voran

voran stehen, die aber mit den niedrigern auf jene folgen. Man sagt nicht so wohl 15 ℔ 4 St. Talg sondern 4 St. 15 ℔.

3. Die einzelnen aus verschiedenen Benennungen bestehenden Posten setze man so auf, daß allemahl die gleichnahmigen Benennungen unter einander zu stehen kommen, das heißt: man setze Thaler unter Thaler, Groschen unter Groschen und Pfennige unter Pfennige.

4. Dann fange man von der Zahl der niedrigsten Benennung an, und wenn die Summe der Zahlen der niedrigern Benennungen so viel Einheiten enthält, daß eine oder mehrere Einheiten der nächst folgenden höhern Benennung darin stecken, so dividire man die erhaltene Summe durch diejenige Zahl, welche eine Einheit der nächst folgenden höhern Benennung ausmacht. Den Quotienten zähle man dann zu den Zahlen der nächst folgenden höhern Benennung, den Rest aber setze man unter die addirten Zahlen.

Erstes Exempel. Von vier Schiffen hat das eine an Getreide geladen 16 Wispel 22 Scheffel 14 Metzen; das andere 23 Wispel 18 Scheffel 13 Metzen; das dritte 32 Wispel 23 Scheffel 12 Metzen; das vierte 9 Wispel 14 Scheffel 15 Metzen. Wie viel haben alle vier Schiffe geladen gehabt? Diese Posten werden folgendergestalt geordnet.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | Wispel | 22 | Scheffel | 14 | Metzen | | | | | |
| 23 | — | 18 | — | 13 | — | 54 Mtz. | $\frac{5}{12}$ | Schfl. | = 3 S. | 6 Mtz. |
| 32 | — | 23 | — | 12 | | | | | | |
| 9 | — | 14 | — | 15 | — | 77 | $\frac{1}{3}$ | = 80 S. | = $\frac{20}{24}$ W. | = 3 W. 8 S. |
| 83 | — | 8 | — | 6 | — | | | | | |

Hier ist die Summe der Metzen = 54. Nun aber machen schon 16 Metzen 1 Scheffel; will man nun wissen, wie viel Scheffel überhaupt in diesen 54 Metzen enthalten sind, so dividire man 54 Metzen durch 16, so bekommt man mit dem Quotienten 3 Scheffel, und noch 6 Metzen darüber. Diese 6 Metzen werden unter die Linie in die Stelle der Metzen gesetzt, die 3 Scheffel aber werden zu den übrigen Scheffeln gerechnet.

Die Summe der gegebenen Scheffel ist = 77, und die in der Summe der Metzen enthaltenen 3 Scheffel dazu, sind zusammen 80 Scheffel. Weil aber schon 24 Scheffel einen Wispel machen, so dividire man die 80 Scheffel durch 24, so bekommt man mit dem Quotienten 3 Wispel und noch 8 Scheffel drüber. Diese 8 Scheffel werden in die Stelle der Scheffel gesetzt, die 3 Wispel aber zu den vorhandenen Wispeln gerechnet.

Die Summe der gegebenen Wispel ist = 80 und die 3 in den Scheffeln enthaltenen Wispel dazu, machen 83 Wispel.

Die ganze Summe ist also 83 Wispel 8 Scheffel 6 Metzen.

Zweites Exempel. Welches ist die Summe von folgenden fünf Posten?

| Thl. | Gr. | Pf. | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 16 | $9\frac{1}{2}$ | 315 — 315 | $1\frac{949}{630}$ pf. = $3\frac{59}{630}$ pf. | |
| 95 | 18 | $8\frac{2}{3}$ | 210 — 420 | | |
| 24 | 23 | $11\frac{4}{5}$ | 126 — 504 | 43 pf. = $\frac{43}{12}$ gr. = 3 gr. 7 pf. | |
| 53 | 19 | $7\frac{4}{7}$ | 90 — 360 | 96 gr. = $\frac{96}{24}$ thl. = 4 thl. | |
| 32 | 17 | $5\frac{5}{9}$ | 70 — 350 | | |
| 272 | — | $7\frac{59}{630}$ | $1\frac{949}{630}$ | | |

Da

Da der Nenner 9 durch den Nenner 3 ohne Rest theilbar ist, so ist der Hauptnenner der Brüche = 9. 7. 5. 2 = 630 und ihre Summe = $1\frac{249}{630}$ Pf. = $3\frac{59}{630}$ Pf. Den Bruch $\frac{59}{630}$ setzt man in die Stelle der Brüche, die 3 ganzen Pfennige werden zu den gegebenen Pfennigen gezählt.

Die Summe der gegebenen Pfennige inclusive der in der Summe der Brüche enthaltenen 3 Pf. ist 43 Pf. Weil aber schon 12 Pf. einen Groschen machen, so dividire man die 43 Pf. durch 12, so erhält man $3\frac{7}{12}$ Gr. oder 3 Gr. 7 Pf.

Die Summe der gegebenen Groschen inclus. der in der Summe der Pf. enthaltenen 3 Gr. macht 96 Gr. Weil aber schon 24 Gr. einen Thaler machen, so dividire man die 96 Gr. durch 24, so kommen gerade 4 Thaler. In die Stelle der Groschen kommt also nichts.

Die Summe der gegebenen Thaler und der in den 96 Groschen enthaltenen 4 Thaler macht 272 Thaler.

Die ganze Summe ist also 272 Thlr. — Gr. $7\frac{59}{630}$ Pf.

### Exempel zum Nachrechnen.

1) Die Summe von 64 Thlr. 16 Ngr. $9\frac{1}{2}$ Pf. — 95 Thlr. 18 Ngr. $8\frac{2}{3}$ Pf. — 24 Thlr. 23 Ngr. $11\frac{4}{5}$ Pf. — 53 Thlr. 19 Gr. $7\frac{4}{7}$ Pf. — 32 Thlr. 17 Gr. $5\frac{5}{9}$ Pf. ist 270 Thlr. 26 Ngr. $3\frac{59}{630}$ Pf. Man muß aber wissen, daß 8 Pf. auf 1 Ngr. und 36 Ngr. auf 1 Thlr. gehen.

2) 20 Ballen 9 Rieß $19\frac{1}{2}$ Buch — 15 Ballen 8 Rieß $18\frac{3}{4}$ Buch — 168 Ballen 5 Rieß $12\frac{2}{3}$ Buch — 39 Ballen 7 Rieß $15\frac{1}{2}$ Buch — 67 Ballen 7 Rieß $17\frac{2}{3}$ Buch — 98 Ballen 8 Rieß $18\frac{1}{4}$ Buch.

18¼ Buch Schreibpapier machen zusammen 411 Ballen 9 Rieß 2⅓ Buch. Hier muß man wissen, daß 1 Ballen = 10 Rieß, 1 Rieß = 20 Buch.

3) 16 Centner 4 St. 20 ℔ 15½ Loth — 98 Centner 19 ℔ 31⅓ Loth — 87 Centner 3 St. 17 ℔ 26¾ Loth — 76 Centner 4 Stein 21 ℔ ½ Loth machen zusammen 279 Centn. 4 Stein 13 ℔ 10 1/12 Loth. Hier muß man wissen, daß 32 Loth auf 1 ℔, 22 ℔ auf 1 Stein und 5 Stein auf 1 Centner gehen.

## 2. Das Subtrahiren.

### 77.

Es ist hier nichts besonders zu merken, außer, wenn die Zahl des Minuendus kleiner ist, als die Zahl des Subtrahendus und daher jene vermehrt werden muß, daß man die Einheit der höhern Benennung in so viel Theile theilen müsse, als Einheiten der niedern Benennung auf eine Einheit der nächst höhern Benennung gerechnet werden. So oft aber eine obere Zahl des Minuendus auf diese Art hat vermehrt werden müssen, so oft muß man auch die untere Zahl des Subtrahendus der nächstfolgenden höhern Benennung um 1 vermehren.

Erstes Exempel. Wie viel bleibt übrig, wenn 13 Thlr. 14 Gr. 7 Pf. von 18 Thlr. 9 Gr. 4 Pf. ausgegeben werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Minuendus | 18 Thlr. | 9 Gr. | 4 Pf. |
| Subtrahendus | 13 — | 14 — | 7 — |
| | 4 Thlr. | 18 Gr. | 9 Pf. |

Weil 4 Pf. weniger ist als 7 Pf. so vermehre man die 4 Pf. um 1 Gr. zerfälle aber diesen 1 Gr.

in

in 12 Pf. so hat man zusammen 16 Pf. davon 7 Pf. weggenommen, bleiben übrig 9 Pf.

Weil die 4 Pf. um 12 Pf. haben müssen vermehrt werden, so vermehre man nun auch die 14 Gr. um 1 Gr., machen 15 Gr.; weil aber 15 Gr. wieder mehr ist als 9 Gr., so vermehre man die 9 Gr. um 1 Thlr. oder um 24 Gr., und ziehe nun 15 Gr. ab von 9 + 24 d. i. 33 Gr., so bleiben übrig 18 Gr.

Weil man aber die 9 Gr. um 24 Gr. vermehren mußte, so vermehre man jetzt auch die 13 Thlr. um 1 Thlr., machen 14 Thlr., und ziehe 14 Thaler ab von 18 Thalern, so bleiben übrig 4 Thlr.

Der ganze Rest ist also 4 Thlr. 18 Gr. 9 Pf.

Zweites Exempel. Von 3 Last 1 Wispel 1 Malter $8\frac{2}{3}$ Scheffel sind verkauft worden 2 Last 2 Wispel 1 Malter $9\frac{3}{4}$ Scheffel; wie viel sind übrig geblieben?

| Last | Wispel | Malter | Schfl. 12 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | $8\frac{2}{3}$ | 4 — | 8 |
| 2 | 2 | 1 | $9\frac{3}{4}$ | 3 — | 9 |
| 1 | 1 | 1 | $10\frac{11}{12}$ | | $\frac{11}{12}$ |

Hier wird vorausgesetzt, daß man wisse, 1 Last halte 3 Wispel, 1 Wispel halte 2 Malter, 1 Malter halte 12 Scheffel.

Der Hauptnenner ist hier $3.4 = 12$, dadurch wird $\frac{2}{3}$ verwandelt in $\frac{8}{12}$ und $\frac{3}{4}$ in $\frac{9}{12}$.

Da $\frac{8}{12}$ weniger ist, als $\frac{9}{12}$, so müssen $\frac{8}{12}$ um 1 oder $\frac{12}{12}$ vermehrt werden, dadurch wird der Minuendus $= \frac{20}{12}$; davon $\frac{9}{12}$ ab, bleiben übrig $\frac{11}{12}$.

Nun muß aber auch die 9 im Subtrahendus um 1 vermehrt werden, dann hat man unten 10 Scheffel.

Weil aber 10 Scheffel mehr ist, als 8 Scheffel, so nehme man zu den 8 Scheffeln noch 1 Malter oder 12 Scheffel, das machen 20 Scheffel, davon nun 10 Scheffel abgezogen, bleiben übrig 10 Scheffel.

Nun folgt im Subtrahendus 1 Malter, dazu noch 1 Malter wegen Vermehrung der 8 Scheffel um 12 Scheffeln. Es sind also unten 2 Malter. Weil aber 2 Malter mehr ist, als 1 Malter im Minuendus, so vermehre man den obern 1 Malter um 1 Wispel oder 2 Malter, so hat man oben 3 Malter, davon abgezogen die untern 2 Malter, bleibt übrig 1 Malter.

Die folgenden 2 Wispel werden nun auch um 1 vermehrt, machen 3 Wispel, und weil 3 Wispel mehr sind als 1 Wispel, so vermehre man den obern Wispel um 1 Last oder 3 Wispel, so erhält man oben 4 Wispel, davon abgezogen die untern 3 Wispel, so bleibt übrig 1 Wispel.

Die folgenden untern 2 Lasten werden vermehrt um 1, machen 3 Lasten, die von den 3 obern Lasten weggenommen, bleibt keine Last übrig.

Der Rest ist also 1 Wispel 1 Malter $10\frac{1}{12}$ Schfl.

Drittes Exempel. Friedrich II, König von Preußen, war geboren den 24 Januar 1712, starb im Jahr 1786 den 17. August. Wie alt ist er geworden?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gestorben | 1786. | 7 Monathe | 17 Tage |
| geboren | 1712. | — | 24 — |
| Alter | 74 J. | 6 Mon. | 24 Tage. |

Man setze das Sterbejahr oben an. Denn zählt man, wie viel Monathe bis Anfang des Aug. verflossen, das sind 7 Monathe und im 8. Monath,

als

als dem August sind 17 Tage verflossen. Darunter kommt das Jahr der Geburt, und weil er den 24. Jan. geboren worden, so war noch kein voller Monath verflossen, also 0 Monathe und 24 Tage im Januar. Man ziehe ab 24 Tage im Januar von 17 Tagen im Aug. Da das nicht angeht, so muß man 1 ganzen Monath und zwar hier von 31 Tagen, weil der vor dem August vorhergehende Julius 31 Tage hat, dazu nehmen, also 31 + 17 = 48, davon 24, bleiben übrig 24 Tage. Dann ziehe man von den 7 Monathen oben, den 1 Monath ab, den man vorhin zu den 17 Tagen des Aug. nehmen mußte, so bleiben übrig 6 Monath. Endlich 1712 von 1786 bleiben 74 Jahr übrig. Das ganze Alter war also 74 Jahr 6 Monath 24 Tage.

Exempel zum Nachrechnen.

1) Von 9 Ruthen 8 Fuß 7 Zoll $6\frac{1}{2}$ Linie abgezogen 8 Ruthen 10 Fuß 8 Zoll $6\frac{3}{4}$ Linien, muß übrig bleiben 9 Fuß 10 Zoll $11\frac{3}{4}$ Linien, vorausgesetzt, daß 1 Ruthe = 12 Fuß, 1 Fuß = 12 Zoll, 1 Zoll = 12 Linien.

2) Friedrich II. König von Preußen war geboren im Jahr 1712 den 24 Januar, vermählte sich im Jahr 1733 den 12. Jun. Wie alt war er damahls? 21 Jahr 3 Monath 18 Tage.

3) Er gelangte im Jahr 1740 den 31 May zur Regierung, wie alt war er damahls? 28 Jahr 4 Monath 7 Tage.

4) Aus den angezeigten Datis, nämlich dem Jahr des Antritts der Regierung Nro. 3. und dem Sterbejahre in dem dritten ausgearbeiteten Exempel läßt sich auch berechnen, daß er 46 Jahr 2 Monath 17 Tage regiert habe.

5) Friedrich Wilhelm II. ist geboren im Jahr 1744 den 25. Sept. und kam zur Regierung im Jahr 1786 den 17. August. Wie alt war damahls der jetzige König v. Preußen? 41 Jahr 10 M. 23 Tage.

## 3. Das Multipliciren.

### 78.

Man kann hier auf verschiedene Arten verfahren, die sich aber besser an besondern Beispielen als durch abstrahirte Regeln zeigen lassen. Welche Art des Verfahrens nun vortheilhafter sey, kommt auf die jedesmahlige Beschaffenheit der Zahlen an.

Erstes Exempel. Es hat jemand täglich 12 Thlr. 19 Gr. 4 Pf. einzunehmen, wie viel beträgt dies in einem gemeinen Jahre von 365 Tagen.

1. Auf lange Art.

12 Thlr. 19 Gr. 4 Pf. in 365.

24
307 Gr.
12
3688 Pf.
365
18440
22128
11064
1346120 Pf.

1346120 Pf.
12) 112176 Gr. Rest 8 Pf.
24) 4674 Thlr.

Man verwandelt die 12 Thlr. durch die Multiplication in 24 in Groschen, und erhält mit den gegebenen 19 Gr. zusammen 307 Gr.

Diese 307 Gr. verwandelt man durch die Multiplication in 12 in Pfennige, und erhält mit den gegebenen 4 Pf. zusammen 3688 Pf.

Diese

Diese 3688 Pf. werden in den gegebenen Multiplicator 365 multiplicirt, das Product ist 1346120, nämlich Pfennige.

Nun verwandelt man wieder diese 1346120 Pf. in Groschen, indem man durch 12 dividirt, und erhält mit dem Quotienten 112176 Gr. und 8 Pf.

Diese 112176 Gr. werden durch 24 dividirt und dadurch in Thaler verwandelt. Es sind aber 112176 Gr. gerade 4674 Thaler, folglich ist die jährliche Einnahme 4674 Thlr. — Gr. 8 Pf.

2. Auf kurze Art.

12 Thlr. 19 Gr. 4 Pf. in 365

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 1/2 | 1/3 |
| 6 | 1/2 | |
| 1 | 1/6 | |

(12

| | | |
|---|---|---|
| 4380 | = | das 12fache |
| 2) 182 | • 12 gr. | die Hälfte. |
| 2) 91 | • 6 • | der 4te Th. |
| 6) 15 | • 5 • | der 24. Th. |
| 3) 5 | • 1 • 8 pf. | der 72. Th. |
| 4674 thl. | — gr. 8 pf. | |

Man betrachtet 365 als den Multiplicandus, und multiplicirt 365

1) in 12 Thlr. macht = = = 4380 Thlr.

2) in 19 Gr. Wollte man aber wirklich in 19 Gr. multipliciren, so würde man daß Product in Groschen erhalten, und diese müßte man denn auf Thaler reduciren. Man betrachtet daher 19 Gr. als einen Theil vom Thaler. Da aber 19 Gr. selbst kein aliquoter Theil vom Thaler ist, so zerfällt man die 19 Gr. in 12 + 6 + 1 Gr. und dann sind 12 Gr. von 1 Thlr. die Hälfte.

6 Gr.

6 Gr. von 12 Gr. die Hälfte oder
von 1 Thlr. der 4te Theil.
1 Gr. von 6 Gr. der 6te oder von
1 Thlr. der 24ste Theil.

Man nimmt daher auch vom Einfachen nämlich 365

a. die Hälfte macht . . . 182thl. 12gr.
b. Von der Hälfte, nämlich 182 Thlr.
12 Gr., wieder die Hälfte 91 . 6 .
c. Von der letzten Hälfte, nämlich
91 Thlr. 6 Gr., den 6ten Theil 15 . 5 .

3) in 4 Pf. Wollte man aber 365 wirklich in 4 Pf. multipliciren, so würde man das Product in Pfennigen erhalten, u. diese müßten dann erst auf Groschen, die Groschen auf Thaler reducirt werden. Man betrachte daher 4 Pf. als einen Theil vom Groschen, und da sind 4 Pf. gerade der dritte Theil von 1 Gr. Man darf daher nur von dem letzten Product aus 1 Gr. in 365, nämlich 15 Thlr. 5 Gr., den 3ten Theil nehmen, der ist . . . . 5 . 1 . 8pf.

Nimmt man endlich das Product aus 12 Thlr. + 12 Gr. + 6 Gr. + 1 Gr. + 4 Pf. in 365 zusammen, so erhält man mit der Summe . . 4674thl. —gr. 8pf. das verlangte Product aus 12 Thlr. 19 Gr. 4 Pf. in 365.

79.

Anstatt den Multiplicandus in den Multiplicator, so wie er gegeben ist, zu multipliciren, kann man

man sich die Sache dadurch erleichtern, daß man den Multiplicator zerfällt. Dieses Zerfällen kann entweder durch die Addition oder Multiplication geschehen.

1. Wenn der Multiplicator durch die Addition in seine Theile zerfällt wird.

Zweites Beispiel. Man soll 12 Thlr. 19 Gr. 4 Pf. in 25 multipliciren.

Also 12 Thlr. 19 Gr. 4 Pf. in 25

307 " 8 " — "

320 Thlr. 3 Gr. 4 Pf. 24 + 1

Hier sind 25 zerfällt auf 24 + 1. Nimmt man nun

1. Die 4 Pf. 24 mahl, so erhält man 2 mahl so viel Groschen als Pfennige da sind, also 8 Gr. Das Product enthält also keine Pfennige.
2. Die 19 Gr. 24 mahl; da 1 Gr. 24 mahl genommen 1 Thlr. machet, so machen 19 Gr. 24 mahl genommen 19 mahl 1 Thlr. d. i. 19 Thlr. In die Stelle der Groschen kommen daher bloß jene 8 Gr. aus Nro. 1.
3. Die 12 Thlr. 24 mahl, so bekommt man 288 Thlr. und dazu die 19 Thlr. aus Nro. 2, machen 307 Rthlr.
4. Zu diesem 24fachen nämlich 307 thlr 8 gr. — pf. wird addirt das 1fache näml. 12 " 19 " 4 "

so ist das 25fache 320 " 3 " " 4 pf.

80.

2. Wenn sich der Multiplicator in Factoren zerfällen läßt.

Drittes Exempel. Von 432 Personen muß jede 2 Scheffel $14\frac{1}{2}$ Metze Hafer liefern, wie viel macht dies zusammen?

Der

$\frac{1}{12}$ Wispel. Die $14\frac{1}{2}$ Metze sind $=\frac{14\frac{1}{2}}{32}$ von 2 Schfl. Da aber 32 kein bequemer Divisor ist, so zerfälle man $14\frac{1}{2}$ in $8+4+2+\frac{1}{2}$ Metze. Nun sind 8 Metzen $=\frac{1}{4}$ von 2 Scheffel, 4 Metzen $=\frac{1}{2}$ von 8 Metzen, 2 Metzen $=\frac{1}{2}$ von 4 Metzen, und $\frac{1}{2}$ Metze $=\frac{1}{4}$ von 2 Metzen. Das übrige kann man leicht aus der Berechnung ersehen.

## 81.

Oft läßt sich der Multiplicator gar nicht in Factoren resolviren, oder er ist doch nicht so bequem, daß er sich auf eine vortheilhafte Art resolviren ließe. Er läßt sich aber bequem machen theils durch Vermehrung desselben per additionem, theils durch Verminderung per subtractionem.

1. Wenn sich eine an sich unbequeme Zahl durch Hinzuthuung einer andern zum Zerfällen bequem machen läßt.

In diesem Fall muß man das Product aus der Zahl, um welche der an sich unbequeme Multiplicator vermehrt worden ist, von dem Product aus dem vermehrten Multiplicator abziehen.

Viertes Exempel. Man soll 8 Centn. 4 St. 20 ℔ $18\frac{2}{3}$ Loth in 47 multipliciren.

Anstatt in den gegebenen Multiplicator 47 zu multipliciren, multiplicire man in 50. Weil 50 um 3 größer ist als 47, so ziehe man vom 50fachen das 3fache ab, so bekommt man mit dem Rest das verlangte 47fache. Die Zahl 50 aber kann man noch in 10mahl 5 resolviren. Uebrigens wird hier vorausgesetzt daß man wisse, 1 Centner sey $=5$ Stein, 1 Stein $=22$ ℔, 1 ℔ $=32$ Loth.

3 mahl 4 St. sind 12 + 2 = 14 St. = $\frac{14}{5}$ Ct. = 2 Ct.
4 St.

3 mahl 8 Ct. sind 24 Ct. + 2 Ct. = 26 Ct.

Das 3fache ist also 26 Ct. 4 St. 17 ℔ 24 Loth.

Dieses 3fache oder 26 Ct. 4 St. 17 ℔ 24 Loth muß nun vom 50fachen, nämlich 449 Ct. 1 St. 17 ℔ $5\frac{1}{3}$ Loth, abgezogen werden.

24 Loth von $5\frac{1}{3}$ + 32 = $73\frac{1}{3}$ Loth bleiben $13\frac{1}{3}$ Loth.

17 + 1 = 18 ℔ von 17 + 22 = 39 ℔ bleiben 21 ℔.

4 + 1 = 5 St. von 1 + 5 = 6 St. bleibt 1 St.

26 + 1 = 27 Ct. von 449 Ct. bleiben 422 Ct.

82.

**2. Wenn ein an sich unbequemer Multiplicator durch Subtraction vermindert und dadurch zum Zerfällen bequem gemacht wird.**

In diesem Fall muß man zum Factum aus der verminderten Zahl das Factum aus der Zahl, um welche der gegebene Multiplicator vermindert worden ist, hinzuthun.

Fünftes Exempel. 8 Ctr. 4 St. 20 ℔ $18\frac{2}{3}$ Loth sollen in 47 multiplicirt werden.

Anstatt in den gegebenen Multiplicator 47 zu multipliciren, multiplicire man in 45. Weil aber 45 um 2 weniger ist, als 47; so addire man zum 45fachen auch das 2fache, so erhält man das verlangte 47fache. Die Zahl 45 aber kann man zerfällen in 9. 5.

| | 8 Ct. 4 St. 20 ℔ $18\frac{2}{3}$ Lt. in | 47 |
|---|---|---|
| Das 1fache | 80 • 4 • 9 • 8 | 45 + 2 |
| Das 9fache | 404 • 2 • 2 = 8 | 9.5 |
| Das 5mahl 9fache | 17 • 4 • 19 • $5\frac{1}{3}$ | |
| Das 2fache + | 422 • 1 • 21 • $13\frac{1}{3}$ Lt. | |

## Auf eine andere Art.

Man betrachte $\frac{11}{12}$ als $1 - \frac{1}{12}$, und ziehe dann vom einfachen Multiplicandus den zwölften Theil desselben ab, so erhält man das vorige Product.

16 Thlr. 13 Gr. $5\frac{1}{2}$ Pf. in $\frac{11}{12}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12) | 1 | 9 | $1\frac{11}{24}$ | $1 - \frac{1}{12}$ |
| | 15 | 4 | $4\frac{1}{24}$ | |

Siebentes Exempel. Man soll 31 Ctr. 18 ℔ $30\frac{1}{3}$ Loth multipliciren in $\frac{15}{28}$.

Man zerfälle so wohl den Zähler als auch den Nenner des Multiplicators in seine Factoren nämlich in 5.3, und 4.7.

31 Ct. 18 ℔ $30\frac{2}{3}$ Loth in $\frac{15}{28} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4) | 7 | 87 | $7\frac{2}{3}$ | |
| 7) | 1 | 12 | $14\frac{17}{21}$ | |
| | 5 | 62 | $10\frac{1}{21}$ | (5 |
| | 16 | 76 | $30\frac{1}{7}$ | (3 |

84.

Ist aber der Multiplicator eine vermischte Zahl, so kann man

entweder dieselbe durchs so genannte Einrichten in einen unächten Bruch verwandeln, und dann ist dieser Fall auf den vorigen reducirt; man dividirt nämlich den Multiplicandus durch den Nenner des Multiplicators und multiplicirt den Quotienten in den Zähler.

Oder man multiplicirt den Multiplicandus besonders in die ganze Zahl des gegebenen Multiplicators und addirt dazu das Product aus den Quotienten, den man erhält, wenn man den gegebenen

Multiplicandus durch den Nenner des Bruchs dividirt, in den Zähler des Bruchs.

Achtes Exempel. 123 Thlr. 23 Gr. $11\frac{1}{2}$ Pf. sollen in $16\frac{2}{3}$ multiplicirt werden.

123 Thlr. 23 Gr. $11\frac{1}{2}$ Pf. in $16\frac{2}{3}$

$\frac{50}{3} = \frac{5.10}{3}$

3) 41 • 7 • $11\frac{5}{6}$ •

206 • 15 • $11\frac{1}{6}$ • (5

2066 • 15 • $3\frac{2}{3}$ • (10

Neuntes Exempel. 12 Thlr. 17 Gr. $5\frac{1}{2}$ Pf. sollen in $35\frac{1}{2}$ multiplicirt werden.

12 Thlr. 17 Gr. $5\frac{1}{2}$ Pf. in $\frac{35\frac{1}{2}}{7.5 + \frac{1}{2}}$

89 • 2 • $2\frac{1}{2}$ • (7

445 • 11 • • $\frac{1}{2}$ • (5

2) 6 • 8 • $8\frac{3}{4}$ •

451 • 19 • $9\frac{1}{4}$ •

Oder

12 Thlr. 17 Gr. $5\frac{1}{2}$ Pf. in $\frac{35\frac{1}{2}}{\underbrace{36}_{12.3} - \frac{1}{2}}$

152 • 17 • 6 • (12

458 • 4 • 6 • (3

2) 6 = 8 • $8\frac{3}{4}$ •

451 • 19 • $9\frac{1}{4}$ •

## 4. Das Dividiren.

### 85.

Man kann den Quotienten entweder auf eine weitläuftige oder auf eine kürzere Art erhalten, die jedesmahlige Beschaffenheit der Zahlen aber bestimmt, welche von beyden man zu wählen habe. Das Verfahren selbst dabey läßt sich besser in beson-

dern

dern Beyspielen aus einander setzen, als durch allgemeine Regel zeigen.

1. Wenn man den Quotienten auf eine weitläuftige Art sucht.

Erstes Exempel. 20 Personen sollen sich in eine Summe von 247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf. theilen; wie viel bekommt jeder?

247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf. dividirt durch 20.

24

5931 Gr.

12

71180 Pf.

20) 3559 Pf.

12) 296 Gr. und 7 Pf. bleiben übrig.

24) 12 Thlr. und 8 Gr. bleiben übrig.

Man resolvirt die Thaler in Groschen und die Groschen in Pfennige, dividirt dann die Pfennige durch den gegebenen Divisor 20. Der Quotient wird ebenfalls in Pfennigen erhalten, die man denn wieder auf entgegengesetzte Wege auf Groschen und die Groschen auf Thaler reducirt.

247 thlr. 3gr. sind $247 \cdot 24 + 3 = 5928 + 3 = 5931$ gr.

5931 gr. 8 Pf. sind $5931 \cdot 12 + 8 = 71172 + 8 = 71180$ Pf.

71180 Pf. dividirt durch 20 giebt zum Quotienten 3559 Pf.

3559 Pf. sind $\frac{3559}{12}$ Gr. $=$ 296 Gr. 7 Pf.

296 Gr. sind $\frac{296}{24}$ Thlr. $=$ 12 Thlr. 8 Gr.

Es kommen also auf jede Person 12 Thlr. 8 Gr. 7 Pf.

86.

**2. Wenn man den Quotienten auf eine kürzere Art sucht.**

Man dividirt jede einzelne Größe durch den gegebenen Divisor, und fängt damit von der Zahl mit der höchsten Benennung an; was bey den höhern Benennungen übrig bleibt, wird in die nächst niedrigere Benennung resolvirt, die gegebene Zahl der niedrigern Benennung dazu genommen und durch den gegebenen Divisor dividirt.

Zweites Exempel. 20 Personen sollen eine Summe von 247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf. zusammen bringen, wie viel wird jeder dazu beytragen müssen?

20) 247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf.

12 Thlr. Rest 7 Thlr.

24

171 Gr.

20) 8 Gr. Rest 11 Gr.

12

140

20) 7 Pf.

247 Thlr. dividirt durch 20, giebt zum Quotienten 12 Thlr. und 7 Thlr. bleiben übrig. Diese 7 Thlr. sollen auch durch 20 dividirt werden, da sich aber 7 Thaler als Thlr. nicht in 20 Theile theilen lassen, so verwandelt man sie in Groschen. Es sind aber 7 Thlr. = 7 . 24 = 168 Gr. wozu man noch die im Dividendus wirklich gegebenen 3 Gr. nimmt, daß man also 168 + 3 = 171 Gr. bekommt.

Nun dividirt man 171 Gr. durch 20, und erhält zum Quotienten 8 Gr. und 11 Gr. bleiben übrig.

Diese

Diese 11 Gr. sollen auch in 20 Theile getheilt werden; weil sich aber 11 Gr. als Groschen nicht in 20 Theile theilen lassen, so resolvirt man sie in Pfennige und nimmt die wirklich gegebenen 8 Pf. dazu. Es sind aber 11 Gr. 8 Pf. = 11 . 12 + 8 Pf. = 132 + 8 Pf. = 140 Pf.

Dividirt man nun diese 140 Pf. durch 20, so erhält man zum Quotienten 7 Pf.

89.

Ist der gegebene Divisor eine große Zahl, so resolvirt man ihn, wenn es angeht, in seine Factoren und dividirt dann nach und nach durch jeden Factor.

Drittes Exempel. 2468 Wispel 1 Malter 10 Scheffel $9\frac{1}{2}$ Metze sollen durch 3024 dividirt werden.

Anmerkung. 1 Wispel = 2 Malter, 1 Malter = 12 Scheffel, 1 Scheffel = 16 Metzen.

3024 :) 2468 W. 1 M. 10 Schfl. $9\frac{1}{2}$ Metze.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9) 336 | 9) | 274 | — | 7 | | $13\frac{1}{2}$ |
| 8) 42 | 8) | 34 | — | 6 | | $15\frac{11}{16}$ |
| 7) 6 | 7) | 4 | 1 | 9 | | $9\frac{11}{112}$ |
| | 6) | — | 1 | 7 | | $9\frac{3}{8}\frac{47}{72}$ |

Der gegebene Divisor 3024 ist in 9. 8. 7. 6 resolvirt, und der Dividendus ist

a) Durch den ersten Factor 9 dividirt.

$\frac{2468}{9}$ W. = 274 Wispel der Rest 2 W. sind 2 . 2 = 4 Malter, dazu den 1 Malter, sind 5 Malter.

dern Beyspielen aus einander setzen, als durch allgemeine Regel zeigen.

1. Wenn man den Quotienten auf eine weitläuftige Art sucht.

Erstes Exempel. 20 Personen sollen sich in eine Summe von 247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf. theilen; wie viel bekommt jeder?

247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf. dividirt durch 20.

24

5931 Gr.

12

71180 Pf.

20) 3559 Pf.

12) 296 Gr. und 7 Pf. bleiben übrig.

24) 12 Thlr. und 8 Gr. bleiben übrig.

Man resolvirt die Thaler in Groschen und die Groschen in Pfennige, dividirt dann die Pfennige durch den gegebenen Divisor 20. Der Quotient wird ebenfalls in Pfennigen erhalten, die man denn wieder auf entgegengesetzte Wege auf Groschen und die Groschen auf Thaler reducirt.

247 thlr. 3gr. sind $247 \cdot 24 + 3 = 5928 + 3 = 5931$ gr.

5931 gr. 8 Pf. sind $5931 \cdot 12 + 8 = 71172 + 8$
$= 71180$ Pf.

71180 Pf. dividirt durch 20 giebt zum Quotienten
3559 Pf.

3559 Pf. sind $\frac{3559}{12}$ Gr. $=$ 296 Gr. 7 Pf.

296 Gr. sind $\frac{296}{24}$ Thlr. $=$ 12 Thlr. 8 Gr.

Es kommen also auf jede Person 12 Thlr. 8 Gr. 7 Pf.

86.

**2. Wenn man den Quotienten auf eine kürzere Art sucht.**

Man dividirt jede einzelne Größe durch den gegebenen Divisor, und fängt damit von der Zahl mit der höchsten Benennung an; was bey den höhern Benennungen übrig bleibt, wird in die nächst niedrigere Benennung resolvirt, die gegebene Zahl der niedrigern Benennung dazu genommen und durch den gegebenen Divisor dividirt.

Zweites Exempel. 20 Personen sollen eine Summe von 247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf. zusammen bringen, wie viel wird jeder dazu beytragen müssen?

20) 247 Thlr. 3 Gr. 8 Pf.

12 Thlr. Rest 7 Thlr.

24

171 Gr.

20) 8 Gr. Rest 11 Gr.

12

140

20) 7 Pf.

247 Thlr. dividirt durch 20, giebt zum Quotienten 12 Thlr. und 7 Thlr. bleiben übrig. Diese 7 Thlr. sollen auch durch 20 dividirt werden, da sich aber 7 Thaler als Thlr. nicht in 20 Theile theilen lassen, so verwandelt man sie in Groschen. Es sind aber 7 Thlr. = 7 . 24 = 168 Gr. wozu man noch die im Dividendus wirklich gegebenen 3 Gr. nimmt, daß man also 168 + 3 = 171 Gr. bekommt.

Nun dividirt man 171 Gr. durch 20, und erhält zum Quotienten 8 Gr. und 11 Gr. bleiben übrig.

Diese

Diese 11 Gr. sollen auch in 20 Theile getheilt werden; weil sich aber 11 Gr. als Groschen nicht in 20 Theile theilen lassen, so resolvirt man sie in Pfennige und nimmt die wirklich gegebenen 8 Pf. dazu. Es sind aber 11 Gr. 8 Pf. = 11 . 12 + 8 Pf. = 132 + 8 Pf. = 140 Pf.

Dividirt man nun diese 140 Pf. durch 20, so erhält man zum Quotienten 7 Pf.

89.

Ist der gegebene Divisor eine große Zahl, so resolvirt man ihn, wenn es angeht, in seine Factoren und dividirt dann nach und nach durch jeden Factor.

Drittes Exempel. 2468 Wispel 1 Malter 10 Scheffel $9\frac{1}{2}$ Metze sollen durch 3024 dividirt werden.

Anmerkung. 1 Wispel = 2 Malter, 1 Malter = 12 Scheffel, 1 Scheffel = 16 Metzen.

| | | |
|---|---|---|
| 3024 | :) 2468 W. 1 M. 10 Schf. $9\frac{1}{2}$ Metze. | |
| 9) 336 | 9) 274 . — . 7 . $13\frac{1}{2}$ . | |
| 8) 42 | 8) 34 . — . 6 . $15\frac{11}{16}$ . | |
| 7) 6 | 7) 4 . 1 . 9 . $9\frac{11}{112}$ . | |
| | 6) — . 1 . 7 . $9\frac{347}{672}$ . | |

Der gegebene Divisor 3024 ist in 9. 8. 7. 6 resolvirt, und der Dividendus ist

a) Durch den ersten Factor 9 dividirt.

$\frac{2468}{9}$ W. = 274 Wispel der Rest 2 W. sind 2 . 2 = 4 Malter, dazu den 1 Malter, sind 5 Malter.

$\frac{1}{7}$ Mltr. = 1 Mltr. der Rest 5 Mltr. sind 5. 12 = 60 Scheffel, dazu die 6 Scheffel, sind 66 Scheffel.

$\frac{6}{7}$ Schfl. = 9 Schfl. der Rest 3 Schfl. sind 3. 16 = 48 Metzen, dazu die $15\frac{11}{16}$ Metzen = $63\frac{11}{16}$ Metzen.

$\frac{63\frac{11}{16}}{7}$ Metzen = 9 Metzen. der Rest $\frac{11}{16}$ durch 7 dividirt, sind $\frac{11}{112}$ Metzen.

Es ist also der 7te Theil von 72sten oder der 504te Theil = 4 Wispel 1 Mltr. 9 Scheffel $9\frac{11}{112}$ Metzen.

d. Dieser 504te Theil wird endlich noch durch den letzten Factor 6 dividirt.

4 Wispel lassen sich als Wispel nicht durch 6 theilen. Man resolvire sie also in 4. 2 = 8 Malter, dazu den 1 Malter genommen, sind 9 Malter.

$\frac{2}{6}$ Mltr. = 1 Mltr. der Rest 3 Malter, sind 3. 12 = 36 Schfl. dazu die 9 Schfl. sind 45 Schfl.

$\frac{45}{6}$ Schfl. = 7 Schfl. der Rest 3 Schfl. sind 3. 16 = 48 Metzen, dazu die $9\frac{11}{112}$ Metzen, sind $57\frac{11}{112}$ Metzen.

$\frac{57\frac{11}{112}}{6}$ Metzen = 9 Metzen. der Rest $3\frac{11}{112}$ Metzen wird eingerichtet, sind $\frac{347}{112}$ Metzen. Diese durch 6 dividirt sind $\frac{347}{6.112} = \frac{347}{672}$ Metzen.

Es ist also der 6ste Theil vom 504ten oder der verlangte 3024ste Theil = 1 Mltr. 7 Scheffel $9\frac{347}{672}$ Metzen.

noch den zehenten Theil des Werths, der ihr in der vorhergehenden Classe zukam, und galt hier bloß 3, d. i. sie hatte hier bloß ihren absoluten Werth.

3.

Machte man nun hinter der 3 in der ersten Classe irgend ein Zeichen, etwa ein Comma, um anzuzeigen, daß die vor dem Comma stehende Ziffer den einfachen Werth habe, und ließe dann noch eine oder mehrere Ziefern folgen, z. B.

IV. III. II. I. I. II. III.

3 3 3 3, 3 3 3 . . . .

so würde die erste 3 hinter dem Comma wieder nur den zehenten Theil von dem Werth gelten, den die 3 vor dem Comma in der ersten Classe hatte, nämlich nur $\frac{3}{10}$, die zweyte 3 hinter dem Comma nur den zehenten Theil von dem Werth der unmittelbar vorhergehenten 3, folglich nur $\frac{3}{10.10}$ oder $\frac{3}{100}$ gelten. Die dritte 3 hinter dem Comma würde wieder nur den zehnten Theil von dem Werth der 3 in der unmittelbar vorhergehenden Classe haben, d. i. sie würde nur $\frac{3}{10.100}$ oder $\frac{3}{1000}$ gelten, u. s. w.

Die drey Ziffern hinter dem Comma bedeuten also $\frac{3}{10}$ und $\frac{3}{100}$ und $\frac{3}{1000}$ u. s. w.

4.

Das Kennzeichen, daß eine Zahl als ein Decimalbruch zu betrachten sey, ist eine davorgesetzte Null mit einem Comma oder Punct hinter der Null, oder auch anstatt der Null diejenige ganze Zahl, mit welcher der Decimalbruch verbunden ist. So ist z. B. 472 eine ganze Zahl. Setzt man aber eine Null mit einem Comma davor, nämlich 0,472, so ists ein Decimalbruch und bedeutet $\frac{4}{10}$ und $\frac{7}{100}$ und $\frac{2}{1000}$. 163504 ist eine ganze Zahl, stände aber

etwa

Sollen daher z. B. folgende drey Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{179}{1000}$, $\frac{27}{000}$ unter einerlei Benennung gebracht werden, so hänge man dem Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{10}$ zwey, des Bruchs $\frac{27}{100}$ aber Eine Null an, dadurch wird aus $\frac{3}{10}$ der Bruch $\frac{300}{1000}$, und aus $\frac{27}{100}$ der Bruch $\frac{270}{1000}$.

### Anmerkung.

Man kann daher einen aus mehrern Ziffern bestehenden Decimalbruch auf eine doppelte Art lesen, entweder so, daß man jede Ziffer als den Zähler eines besondern Bruchs ansieht und sie mit ihrem correspondirenden Nenner ausspricht, oder daß man die ganze Zahl als den Zähler eines einzigen Bruchs betrachtet, zu welchem der Nenner von der letzten Ziffer des Zählers gehört. So kann man z. B. den Bruch

0,635 lesen { entweder $\frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$. oder $\frac{635}{1000}$.

### Beweis.

$$\frac{6}{10} = \frac{600}{1000}$$
$$\frac{3}{100} = \frac{30}{1000}$$
$$\frac{5}{1000} = \frac{5}{1000}$$

F. $\frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{600}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000}$

$\frac{600}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{635}{1000}$

F. $\frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{635}{1000}$.

## III. Die vier Rechnungsarten.

### 1. Das Addiren.

8.

Man setze die Ziffern der Decimalbrüche so unter einander, daß die 10theiligen hinter dem Comma

aber werden zur folgenden höhern Classe gerechnet.

e. Die Summe der 10theilchen macht $\frac{21}{10}$, dazu noch genommen $\frac{1}{10}$ aus Nro. d. macht $\frac{22}{10}$. Es ist aber $\frac{22}{10} = \frac{20}{10} + \frac{2}{10}$; davon kommen $\frac{2}{10}$ oder bloß der Zähler 2 in die Summe der Zehntel, die $\frac{20}{10} = 2$ Ganze werden zu den übrigen Ganzen gerechnet, deren Summe daher $22 + 2 = 24$ beträgt. Es ist daher die ganze Summe $24 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{6}{100000}$ oder $24\frac{28376}{100000}$ oder 24,28376.

## 9.

Es ist oben §. 6. des Vortheils gedacht, den die Decimalbrüche gewähren, wenn man gemeine Brüche mit verschiedenen Nennern addiren soll. Man darf nur die zu addirenden gemeinen Brüche durch Decimalbrüche ausdrücken. Ein Paar Exempel werden hinreichend seyn, sich davon zu überzeugen.

Erstes Exempel. Man soll folgende Brüche $\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{2}$ $\frac{14}{25}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$ addiren.

Verwandelt man diese Brüche auf die §. 5. gezeigte Art in Decimalbrüche, so ist

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{3}{5}$ | = | 0,6 |
| $3\frac{1}{2}$ | = | 0,96875 |
| $\frac{14}{25}$ | = | 0,56 |
| $\frac{3}{4}$ | = | 0,75 |
| $\frac{5}{8}$ | = | 0,625 |
| F. $\frac{3}{5} + 3\frac{1}{2} + \frac{14}{25} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$ | = | 3,50375 |

Sucht man auf gewöhnliche Art die Summe dieser fünf gemeinen Brüche $\frac{3}{5} + 3\frac{1}{2} + \frac{14}{25} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$, so findet man sie $= 3\frac{403}{800}$; hebt man nun den gefunde-

fundenen Decimalbruch $\frac{50375}{100000}$ durch 125, so erhält man ebenfalls $\frac{403}{800}$. Es ist also 3,50375 die wahre Summe der fünf gegebenen Brüche.

Zweites Exempel. Man soll die Brüche $\frac{565}{768}$, $\frac{419}{3456}$ und $\frac{632}{675}$ addiren.

Nach §. 5. ist in fünf Decimalstellen ausgedrückt

der Bruch $\frac{565}{768} = 0,73567$

$\frac{419}{3456} = 0,12123$

$\frac{632}{675} = 0,93629$

---

Folgl. $\frac{565}{768} + \frac{419}{3456} + \frac{632}{675} = 1,79319$

Auf gewöhnliche Art wird die Summe dieser drey Brüche viel mühsamer folgendergestalt gefunden. Man sucht den Hauptnenner, dieser ist hier das Product aus 768 in 3456 in 675 = 1791590400.

1791590400

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{565}{768}$ | 2332800 — | 1318032000 |
| $\frac{419}{3456}$ | 518400 — | 217209600 |
| $\frac{632}{675}$ | 2654208 — | 1677459456 |
| | | 3212701056 |

$$\frac{3212701056}{1791590400} = 1\frac{45689}{57600}$$

Jene Summe 1,79319, die man durch die erste Berechnung erhalten hat, ist nur um $\frac{157}{7200000}$ kleiner, als die Summe dieser Brüche, auf gewöhnliche Art gesucht. Der Unterschied würde noch geringer seyn, wenn man die gegebenen Brüche etwa in sechs Decimalstellen ausgedruckt hätte.

1. Anmerkung.

1. Man kann die leeren Stellen rechter Hand auch durch Nullen ausfüllen, welches zur Vermei-

2. Wenn man die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandelt.

$\frac{603}{1024} = 0{,}5888671875$

$\frac{27}{1280} = 0{,}0210937500$

$0{,}5677734375$

Hebt man diesen Bruch $\frac{5677734375}{10000000000}$ durch 1935125 so erhält man ebenfalls $\frac{2907}{5120}$.

Man soll von $\frac{18}{25}$ abziehen $\frac{5}{28}$.

1. Auf gewöhnliche Art.

700

$\frac{18}{25}$ | 28 — 504

$\frac{5}{28}$ | 25 — 125

Rest $\frac{379}{700}$.

2. Wenn man die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandelt.

$\frac{18}{25} = 0{,}72000$

$\frac{5}{28} = 0{,}17857 \ldots$

$0{,}54143 \ldots$

Der Unterschied beträgt hier bloß 0,000001.

## 3. Das Multipliciren.

### II.

Auch beym Multipliciren der Decimalbrüche geht man so zu Werke, als bey der Multiplication ganzer Zahlen, nur daß man im Producte von der rechten Hand gegen die linke zu so viel Ziffern zu neuen Decimaltheilchen abschneidet, als Decimaltheile in beyden Factoren zusammen genommen da sind.

1. So ist z. B. 0,6 multiplicirt in 0,4 = 0,24.

Denn $0{,}6 = \frac{6}{10}$

$0{,}4 = \frac{4}{10}$

F. $0{,}6 . 0{,}4 = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}$

$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$

$\frac{24}{100} = 0{,}24$

F. $0{,}6 . 0{,}4 = 0{,}24$.

2. Eben so ist 0,84 multiplicirt in 0,25 = 0,2100 = 0,21. Denn

$0{,}84 = \frac{84}{100}$

$0{,}25 = \frac{25}{100}$

F. $0{,}84 . 0{,}25 = \frac{84}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{2100}{10000} = \frac{21}{100} = 0{,}21$.

3. Man soll 24,65 multipliciren in 2,7.

24,65
2,7
17255
4930
66,555.

Denn $24{,}64 = \frac{2465}{100}$

$2{,}7 = \frac{27}{10}$.

F. $24{,}65 . 2{,}7 = \frac{2465}{100} \cdot \frac{27}{10} = \frac{66555}{1000} = 66{,}555$.

12.

Wenn die beyden Factoren so kleine Brüche sind, daß das Product aus weniger geltenden Ziffern besteht, als beyde Factoren zusammen Decimaltheile enthalten, so füllet man die noch leeren Stellen vor dem Producte der geltenden Ziffern mit Nullen aus, und an die Stelle der Einheit kommt gleichfalls eine Null mit einem Comma zu stehn.

4. Man

dirt, auch den Quotienten in einer ganzen Zahl erhält, wenn anders der Divisor im Dividendus aufgeht; ist dies aber nicht, so kann man nach §. 5. durch Anhängung einer oder mehrerer Nullen an den Rest den Quotienten auch in Decimaltheilen finden.

1. Man soll z. B. 142,8 durch 3,4 dividiren.

3,4 : 142,8

dafür 34) 1428 | 42 Ganze.
136 :
68
68
0

## Beweis.

$$142,8 = \frac{1428}{10}$$
$$3,4 = \frac{34}{10}$$

$$\S.\ 142,8 : 3,4 = \frac{1428}{10} : \frac{34}{10}$$
$$\frac{1428}{10} : \frac{34}{10} = \frac{1428}{10} \cdot \frac{10}{34} = \frac{1428.10}{34.10} = \frac{1428}{34}$$

$$\S.\ 142,8 : 3,4 = \frac{1428}{34} = 42.$$

Es gilt hier eben das, was oben III. §. 72. zum Beweise desselben Falls bey gemeinen Brüchen angeführt worden; es verhalten sich nämlich auch hier die Brüche 142,8 und 3,4 so gegen einander, wie die ganzen Zahlen 1428 und 34.

2. Man soll 142,8 durch 3,5 dividiren. Man dividire dafür 1428 durch 35:

35) 1428 | 40,8.
140 :
280
280
0

Will

aber ists anders, der enthält dann immer auch eben so viel Decimalstellen, als der Dividendus mehr Decimaltheile hatte, als der gegebene Divisor.

4. Man soll z. B. 10,125 durch 1,25 dividiren.

Man hänge an den Divisor 1,25 noch eine Null, so bekommt man 1,250, und nun dividire man 10125 durch 1250.

```
1250) 10125 | 8,1
 10000
 ------
  1250
  1250
  ----
     0
```

Probe.

```
 1,25
  8,1
 ---
  125
 1000
 ----
10,125.
```

Oder man dividire gleich 10,125 als ganze Zahl durch 1,25 auch als ganze Zahl, so ist 10125 : 125 = 81. Weil aber der Dividendus einen Decimaltheil mehr enthält, als der Divisor, so schneide man auch im Quotienten eine Ziffer von der rechten Hand gegen die linke zu ab, so erhält man den wahren Quotienten 8, 1.

Beweis.

$$10{,}125 = \frac{10125}{1000}$$
$$1{,}25 = \frac{125}{100}$$

$$\S.\ 10{,}125 : 1{,}25 = \frac{10125}{1000} : \frac{125}{100} = \frac{10125}{1000} \cdot \frac{100}{125} =$$
$$\frac{1012500}{125000} = \frac{10125}{1250} = 8{,}1. \text{ (III. §. 72)}$$

5. Soll man 10,125 durch 12,5 dividiren, so kommen ebenfalls 81 zum Quotienten. Weil aber der Dividendus zwey Decimalstellen mehr hat, als der Divisor, so sind die 81 keine Ganze, sondern $\frac{81}{100}$ oder 0,81, wie man bey geringem Nachdenken auch leicht finden kann, weil ja die 10 Ganze

des

des Dividendus kleiner sind, als die 12 Ganze des Divisors, und also in Ansehung der Ganzen der Divisor 12 im Dividendus 10 nicht mehr, als 0 mahl enthalten seyn kann. Es ist also 10,125 : 12,5 = 0,81.

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} 10{,}125 & = & \frac{10125}{1000} \\ 12{,}5 & = & \frac{125}{10} \end{array}$$

$$\text{F. } 10{,}125 : 12{,}5 = \frac{10125}{1000} : \frac{125}{10} = \frac{10125}{1000} \cdot \frac{10}{125} = \frac{101250}{125000} = \frac{10125}{12500} = 8{,}1.$$

15.

3. Wenn der Divisor mehr Decimalstellen enthält als der Dividendus.

Man betrachte wieder beyde Zahlen als ganze, und dividire wie gewöhnlich eine durch die andere, hänge aber an den Quotienten noch so viel Nullen, als der Divisor mehr Decimalstellen hat, als der Dividendus.

6. Man soll z. B. 4927,5 dividiren durch 3,65.

Dividirt man dafür 49275 durch 365, so ist der Quotient 135. Weil aber der Divisor eine Decimalstelle mehr enthält, als der Dividendus, so muß man an den Quotienten noch eine Null anhängen, und dann ist der wahre Quotient von 4927,5 durch 3,65 dividirt = 1350.

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} 4927{,}5 & = & \frac{49275}{10} \\ 3{,}65 & = & \frac{365}{100} \end{array}$$

$$\text{F. } 4927{,}5 : 3{,}65 = \frac{49275}{10} : \frac{365}{100} = \frac{49275}{10} \cdot \frac{100}{365} = \frac{492750}{365} = 1350.$$

7. Man

7. Man soll 19744 dividiren durch 1,234.

Man dividire dafür 19744 durch 1234, der Quotient ist 16. Weil aber der gegebene Divisor nicht 1234, sondern 1,234, mithin der Divisor drey Decimalstellen mehr enthält, als der Dividendus, so hänge man an jene 16 noch drey Nullen, denn ist der wahre Quotient von 19744 dividirt durch 1,234 = 16000.

8. Man soll 0,03375 dividiren durch 0,0000125.

Man dividire dafür 3375 durch 125, so ist der Quotient 27. Diesen aber müssen noch so viel Nullen angehängt werden, als der Divisor mehr Decimalstellen hat, als der Dividendus, mithin noch zwey Nullen, und dann ist der wahre Quotient aus 0,03375 dividirt durch 0,0000125 = 2700. Der Beweis ist wie bey den vorigen Exempeln. Die Probe aber kann man, wie gewöhnlich, machen, indem man

den Divisor 0,0000125
in den Quotienten 2700 multiplicirt.

87500
250

0,0337500

Eigentlich kommen hier 337500 heraus; weil aber in dem einen Factor, nämlich im Divisor 0,0000125 sieben Decimalstellen enthalten sind, so muß außer der den Mangel der Ganzen andeutenden Null noch eine Null vorgesetzt werden, und dann ist das Product 0,0337500; weil aber die beyden Nullen am Ende gar keinen Werth haben, so kann man sie füglich weglassen, und dann ist das Product aus dem gegebenen Divisor 0,0000125

in

in den Quotienten 2700 = 0,03375, welches der gegebene Dividendus war.

# Fünftes Kapitel.

## Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Größen.

1.

Man kann jede Größe oder Zahl durch Buchstaben ausdrücken, und zwar wählt man dazu die kleinen Lateinischen Buchstaben. Dabey versteht sichs denn von selbst, daß ein und derselbe Buchstabe in Einem Rechnungsfall oder in Einer Aufgabe — er komme darin auch noch so oft vor — immer die Bedeutung behalten müsse, die man ihm einmahl gegeben hat.

2.

Jede Größe ist entweder positiv oder negativ; jener setzt man das Zeichen der Addition (+) dieser das Zeichen der Subtraction (—) vor. Stehen indessen die positiven Größen zu Anfange, so läßt man das Zeichen weg; bey den negativen Größen aber darf es nie weggelassen werden, auch dann nicht, wenn sie zu Anfange stehen. Uebrigens bedeuten diese Zeichen bloß, daß die damit bezeichneten Größen einander entgegengesetzt sind, wie etwa baares Vermögen und Passivschulden, oder wie eine vorwärts und rückwärts gerichtete Bewegung.

3.

Die Zahlen, die zuweilen mit der Buchstabengröße als Factoren verbunden sind, heißen die Coeffi-

Coefficienten der Buchstabengrößen. Steht aber eine Größe ohne solche Zahl, so muß man sich allemahl die Eins als ihren Coefficianten denken. So bedeutet a so viel als 1a.

## I. Das Addiren.

4.

Der Bequemlichkeit wegen setzt man die gleichnamigen Größen unter einander. Dies erleichtert die Rechnung.

1. Wenn die zu addirenden Größen einerley Zeichen haben.

Das Verfahren in diesem Fall und die Richtigkeit desselben leuchtet in folgenden Beyspielen von selbst in die Augen, man darf sich nur unter den positiven Größen eingenommene und unter den negativen ausgegebene Posten vorstellen. Z. B.

| | |
|---|---|
| a + 2b + 5d | 2a — d + 3g — h |
| 3a + 4b + d + h | 4a — 6d + g — 7h |
| 2a + 10b + 2d + m | a — 3d + g + f |
| 6a + 16b + 8d + h + m | 7a — 10d + 5g — 8h + f |

5.

2. Wenn die zu addirenden Größen entgegengesetzte Zeichen haben.

Eine gleiche Anzahl positiver und negativer Größen heben einander auf. Stellt man sich unter den positiven Größen baares Vermögen, unter den negativen Größen aber Passivschulden vor, so ist klar,

1. daß der, welcher eben so viel Passivschulden als baares Vermögen hat, im Grunde nichts habe. 100 Thlr. Vermögen und 100 Thlr. Schulden heben einander auf.

2. der, welcher mehr baares Vermögen als Passivschulden hat, besitzt so viel mehr als nichts, so viel sein baares Vermögen mehr beträgt, als seine Passivschulden. Wer 100 Thlr. im Vermögen, aber auch 50 Thlr. Passivschulden hat, dessen Vermögen beträgt im Grunde nur 50 Thlr.

3. Wer aber mehr Passivschulden hat, als baares Vermögen, der hat so viel weniger als nichts, so viel seine Passivschulden mehr betragen, als sein wirkliches Vermögen. Wer 50 Thlr. im Vermögen und 100 Thlr. Passivschulden hat, der hat nicht nur nichts, sondern 50 Thlr. weniger als nichts.

Im Grunde besteht also das Addiren entgegengesetzter Größen in Subtraction derselben. Man zieht nämlich die kleinere Größe von der größern ab, und giebt dem Rest das Zeichen der größern Größe. Mit der Differenz dieser Größen erhält man dann die Summe derselben. Z. B.

$$\begin{array}{r} 5a - 4b - c \\ -\ 6a + 3b + 4c + f \\ \hline \end{array}$$

Summe $-\ a - b + 3c + f.$

Von 6a Schulden werden 5a durch 5a baares Vermögen aufgehoben, es bleiben also noch 1a oder a Schulden.

Von 4b Schulden werden 3b durch die 3b Baarschaft aufgehoben, es bleiben also noch 1b oder b Schulden.

Von 4c Baarschaft wird 1c durch 1c Schulden aufgehoben, es bleiben also noch 3c baares Vermögen.

Zu f baares Vermögen kommt nichts hinzu, es sind aber auch keine Schulden unter der Benennung

nung

nung f vorhanden, folglich bleibt † f in der Summe unverändert.

Ein anderes $3a - 2b - 8c + 7f$
$-6a - 4b + 2c - 3g$
$3a + 6b + 3c + 2g$

Summe $= 3c + 7f - g.$

3a und 3a Vermögen werden durch 6a Passivschulden völlig destruirt.

Desgleichen 2b und 4b $=$ 6b Passivschulden durch 6b Vermögen.

Von 8c Passivschulden werden durch 2c und 3c $=$ 5c Baarschaft eben so viel aufgehoben, und bleiben daher noch 3c Passivschulden.

7f ist allein als Baarschaft vorhanden, und wird als solche unverändert in Summe gebracht.

Von 3g Passivschulden werden durch 2g Baarschaft eben so viel aufgehoben und kommt folglich 1g oder g als Schuld in Summe.

Ein anderes $a - 2b + 3c + 4d - 5f$
$-6a + 7b + 8c - 9d - 10f$
$-3a + 8b - 7c - 6d + 5f - g$
$9a - 13b - 7c + 7d - f + 2g$

$a - 3c - 4d - 11f + g$

## 2. Das Subtrahiren.

### 6.

Beym Subtrahiren sind folgende Fälle zu unterscheiden. Entweder haben die Größen, welche von einander abgezogen werden sollen, einerley Zeichen, so daß entweder positive Größen von positiven oder negative Größen von negativen abzuziehen; oder sie haben verschiedene Zeichen, und

es sollen entweder negative Größen von positiven, oder positive Größen von negativen abgezogen werden.

7.

1. Wenn die Größen einerley Zeichen haben.

a. Wenn positive Größen von positiven abzuziehen.

α. Wenn der Minuendus größer ist, als der Subtrahendus.

In diesem Fall zieht man die kleinere Größe des Subtrahendus wie gewöhnlich von der größern Größe des Minuendus ab, der bleibende Rest kann ebenfalls nicht anders, als positiv seyn.

Man kann aber auch das Pluszeichen der Subtrahendusgröße ins Minuszeichen verwandeln, und dann wie beym Addiren entgegengesetzter Größen (§. 5.) die Differenz suchen, der man dann das Zeichen der größern Größe giebt.

Z. B.

| | |
|---|---|
| 12a | 12a |
| 7a | 7a |
| Rest = 5a | — |
| | 5a |

8.

β. Wenn der Minuendus kleiner ist, als der Subtrahendus.

In diesem Fall bleibt ein negativer Rest, denn es fehlt eben so viel am Minuendus, als der Subtrahendus größer ist, als der Minuendus. Man soll z. B. 12a von 7a abziehen.

| | |
|---|---|
| I. 7a | II. 7a |
| 12a | 12a |
| — 5a | — |
| | — 5a |

1. Gäbe man 6a aus von 7a, so bliebe ganz natürlich übrig 1a oder a. §. 5.
2. Gäbe man 7a aus von 7a, so bliebe natürlicher Weise o übrig.
3. Gäbe man aber 8a aus von 7a, so bliebe freylich auch wieder 1a oder a; allein dies a muß nothwendig etwas ganz anders bedeuten, als das a im ersten Fall, sonst wäre ja unter dem Rest bey 6a von 7a und dem Rest bey 8a von 7a kein Unterschied. Giebt man mehr aus, als man hat, so wird das, was man darüber ausgiebt, Schuld oder negativ, also ist der Rest bey 8a von 7a $\equiv$ — a. Eben so kann nun auch bey 12a von 7a nicht 5a übrig bleiben, denn dies war ja der Rest bey 7a von 12a nach §. 5; vielmehr muß der Rest in diesem Fall — 5a seyn.

### Anmerkung.

Auch dieser Fall läßt sich auf den zweyten Fall der Addition §. 5. reduciren, wenn man das Zeichen der Subtrahendusgröße ins entgegen gesetzte verwandelt, und dann die Differenz zwischen der kleinern Größe des Minuendus und der größern des Subtrahendus mit dem veränderten Zeichen der größern Größe bemerkt.

### 9.

b. Wenn negative Größen von negativen abgezogen werden sollen.

α. Wenn der Minuendus größer ist, als der Subtrahendus.

Offenbar muß in diesem Fall der Rest auch negativ seyn; denn hebe ich den Mangel einer mangelnden Größe ganz, so geht alles auf, hebe ich

den Mangel derselben nur zum Theil, so bleibt ja immer noch einiger Mangel übrig. Oder wenn man sich unter den Minusgrößen Passivschulden vorstellt, und ich nehme von der ganzen Summe derselben einige weg, so müssen offenbar noch einige übrig bleiben. Nimmt man also — 7a von — 12a weg, so müssen noch — 5a übrig bleiben.

| I. | | oder II.. | |
|---|---|---|---|
| | — 12a | | — 12a |
| | — 7a | | — 7a |
| | — 5a | | + |
| | | | — 5a. |

## Anmerkung.

Auch hier erhält man denselben Rest, wenn man das Minuszeichen des Subtrahendus ins entgegengesetzte Pluszeichen verwandelt, und anstatt, wie Nr. I. zu subtrahiren, die Differenz zwischen beyden Größen nach §. 5. sucht, wie hier Nr. II. geschehen.

### 10.

*A.* Wenn der Minuendus kleiner ist, als der Subtrahendus.

In diesem Fall erhält man einen positiven Rest; denn hebe ich den Mangel einer mangelnden Größe um mehr als nöthig ist, so ist ja offenbar der Ueberschuß positiv. Verringert man eine Schuld von 7 Thlr. um 12 Thlr., so ist ja der Ueberschuß von 5 Thlr. baares Vermögen. Also:

| I. | | oder II. | |
|---|---|---|---|
| | — 7a | | — 7a |
| | — 12a | | — 12a |
| | + 5a | | + |
| | | | + 5a. |

Anmer-

### Anmerkung.

Nro. II. Hier ist das Minuszeichen des Subtrahendus wieder ins entgegen gesetzte Pluszeichen verwandelt und nach Art der Addition §. 5. verfahren.

II.

2. Wenn die Größen verschiedene Zeichen haben.

a. Wenn negative Größen von positiven abgezogen werden sollen.

α. Wenn der Minuendus größer ist als der Subtrahendus.

In diesem Fall ist der Rest positiv und gleich dem Collect aus dem Minuendus und Subtrahendus; denn nimmt man den Mangel, der sich an einer Größe befindet, weg, so wird ja dadurch die Größe um so viel vermehrt, so viel der Mangel beträgt, der gehoben worden ist. Fehlen mir z. B. noch 7 Thlr. an einer gewissen Summe, so erhalte ich ja diese Summe, wenn ich den Mangel von 7 Thlr. wegnehme oder aufhebe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | 12a | oder II. | 12a |
| | —7a | | —7a |
| | | | † |
| | 19a | | 19a. |

### Anmerkung.

Man kann auch hier, wie Nro. II. geschehen, das Subtrahiren verwandeln in diejenige Art der Addition, die §. 5. vorgekommen, indem man das Minuszeichen des Subtrahendus ins entgegen gesetzte Pluszeichen verwandelt.

12.

a. Wenn der Minuendus kleiner ist, als der Subtrahendus.

Auch hier wird der Rest positiv und besteht aus dem Collect der beyden Größen aus dem §. 11. angeführten Grunde.

Uebrigens kann man auch hier die Subtraction verwandeln in die Art der Addition §. 5., wenn man das Minuszeichen des Subtrahendus ins entgegengesetzte Pluszeichen verwandelt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | 7a | oder II. | 7a |
| subtrah. | — 12a | addirt | — 12a |
| | 19a | | † |
| | | | 19a. |

13.

b. Wenn positive Größen von negativen abzuziehen.

a. Wenn der Minuendus größer ist, als der Subtrahendus.

In diesem Fall soll eine negative Größe wirklich vermindert werden, es muß also offenbar der Rest negativ seyn und das Aggregat aus beyden Größen enthalten.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | — 12a | oder II. | — 12a |
| | 7a | | 7a |
| | — 19a. | | — |
| | | | — 19a. |

Der Rest kann nicht 19a seyn, sonst wäre dieser Fall von den §. 11. nicht verschieden, welches er gleichwohl wirklich ist. Der Rest kann aber auch nicht — 5a seyn, sonst müßte dieser Fall mit dem §. 9. einerley seyn, welches er doch nicht ist.

An-

### Anmerkung.

Nro. II. ist das Subtrahiren in ein wirkliches Addiren verwandelt, nachdem man das Pluszeichen des Subtrahendus ins Minuszeichen verwandelt hat.

### 14.

§. Wenn der Minuendus kleiner ist, als der Subtrahendus.

In diesem Fall muß der Rest auch gleich seyn dem Aggregat der beyden Größen, und das Minuszeichen erhalten, aus dem vorhin angeführten Grunde.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | — | 7a | oder II. | — | 7a |
| | | 12a | | | 12a |
| | — | 19a | | — | 19a. |

Der Rest kann weder 5a noch 19a seyn; weil sonst dieser Fall entweder mit dem §. 10. oder mit dem §. 11. einerley seyn müßte, welches aber nicht ist.

### Anmerkung.

Verwandelt man auch hier das Pluszeichen des Subtrahendus in Minus, wie Nro. II. geschehen, so findet man durch die Addition beyder Größen eben denselben Rest wie Nr. I.

### 15.

Man kann also für alle acht Subtractionsfälle folgende allgemeine Regel festsetzen. Man verwandele das Zeichen der Subtrahendusgröße ins entgegengesetzte. Erhält man denn für beyde Größen einerley Zeichen, so addirt man beyde Größen auf gewöhnliche Art wie §. 4; sind aber die Zeichen

nach Verwandlung derselben verschieden; so bemerkt man die Differenz zwischen beyden Größen und zwar mit den Zeichen der größern Größe nach Art des zweyten Falles der Addition §. 5. Oder kurz: Man verwandelt nach Abänderung des Zeichens des Subtrahendus ins entgegengesetzte die Subtraction in Addition.

16.

Recapitulation.

9a † 7b — 12c — 3d † 8e † 3f — 12g — 4h.
5a † 8b — 5c — 10d — 5e — 7f † 9g † 7h.
— — † † † † — —

4a — b — 7c † 7d † 13e † 10f — 21g — 11h.
§. 6. §. 7. §. 8. §. 9. §. 10. §. 11. §. 12. §. 13.

## 3. Das Multipliciren.

17.

Sind die Factoren bloße Buchstabengrößen, so setzt man sie gewöhnlich ohne alles Zeichen neben einander. So ist z. B. das Factum aus a multiplicirt in b = ab. Das Factum aus a multiplicirt in b multiplicirt in c = abc.

Haben aber die Buchstabengrößen noch Coefficienten bey sich, so setzt man entweder zwischen den Coefficienten das Multiplicationszeichen (.) oder (×) oder man multiplicirt die Coefficienten wirklich und setzt ihr Product vors Product der Buchstabengrößen. So ist z. B. das Product aus 4a in 3b multiplicirt = 4.3ab oder 4×3ab oder 12ab. Das Product aus 2ab multiplicirt in 7c multiplicirt in 10y = 2.7.10abcy oder 2×7×10abcy oder 140abcy. Soll aber bloß angedeutet werden, daß

zwey

zwey oder mehr Größen in einander multiplicirt werden sollen, so setzt man zwischen den zu multiplicirenden Größen eines von den beyden Multiplicationszeichen. Z. B. 4a soll in b multiplicirt werden, wird so angedeutet: 4a . b. oder 4a × b.

18.

Da aber die Factoren nicht allemahl positiv sind, sondern auch negativ seyn können, so muß man beym Multipliren drey Fälle unterscheiden. Eigentlich lassen sich nur immer zwey Factoren auf einmahl in einander multipliciren, und da sind denn entweder beyde Factoren positiv, oder der eine Factor ist positiv, der andere negativ, oder beyde Factoren sind negativ.

19.

1. Wenn beyde Factoren positiv sind oder das Pluszeichen haben.

In diesem Fall ist ganz natürlich das Product ebenfalls positiv; denn man soll eine positive Größe wirklich einigemahl positiv nehmen, d. i. wirklich einigemahl zu sich selbst addiren. Nun aber kann ja die Summe von einigen positiven Größen nicht anders, als gleichfalls positiv seyn. Denn weil

+ 4 in + 3 multiplicirt = ist + 4 + 4 + 4
+ 4 + 4 + 4 = + 12.

---

so ist auch + 4 in + 3 multiplicirt = + 12.

Es ist also auch + a multiplicirt in + b = + ab
oder a — — — b = ab, weil
man das Pluszeichen von vorne nie setzet.

Eben so ist das Product aus x in y = xy.

20.

2. Wenn der eine Factor eine Plusgröße, der andere aber eine Minusgröße ist.

In diesem Fall muß das Product negativ seyn; denn da z. B. — 4 multiplicirt in + 3 nichts anders heißt, als — 4 wirklich dreymahl nehmen, so muß das Product — 12 seyn, oder

— 4 in + 3 multiplicirt ist = — 4 — 4 — 4

— 4 — 4 — 4 = — 12

---

Folgl. — 4 in + 3 multipl. ist = — 12.

Es läßt sich aber auch folgendergestalt beweisen.

+ 4 in + 3 ist = + 12 §. 19.

Es muß also auch jede andere Größe, welche 4 gleich ist, wenn sie in + 3 multiplicirt wird, zum Product 12 geben.

Nun ist 4 = 6 — 2

Folgl. muß auch 4 in 3 = (6 — 2) in 3 seyn. Es ist aber + 3 mahl + 6 = + 18. §. 19.

wäre nun auch + 3 mahl — 2 = + 6;

so wäre + 3 mahl (+ 6 — 2) = + 18 + 6 = + 24.

Es muß aber + 3 mahl (+ 6 — 2) = + 3 mahl + 4 = + 12 seyn;

Folglich, da + 3 mahl + 6 = 18 ist §. 19, so kann unmöglich + 3 mahl — 2 auch = + 6 seyn.

Setzt man aber + 3 mahl — 2 = — 6;

so ist + 3 mahl (+ 6 — 2) = + 18 — 6 = 12 = 3 · 4.

Nun aber ist — 6 das Product aus + 3 mahl — 2, es ist also richtig, daß das Product aus einem positiven Factor in einen negativen Factor negativ seyn müsse.

Es ist daher — a in + b = — ab.

Eben so muß nun auch allgemein — a in — b = + ab oder = ab seyn. Und überhaupt ist das Product aus zwey negativen Größen positiv.

22.

Hieraus läßt sich nun für alle drey Multiplicationsfälle folgende allgemeine Regel abstrahiren. Haben die beyden Factoren gleiche Zeichen, so wird das Product positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird das Product negativ.

23.

Nun ists leicht, auch solche Factoren in einander zu multipliciren, die aus mehreren Theilen bestehen, welche durch verschiedene Zeichen mit einander verbunden sind. Man multiplicirt nämlich den Multiplicandus in jeden Theil des Multiplicators und addirt dann, wie bey der Multiplication in Zahlen, die Partialproducte. Dabey ists gleichviel, ob man von der linken oder rechten Hand den Anfang macht.

1. Man multiplicire a + b in c + d, oder (a + b) (c + d)

a + b
c + d

ac + bc das Product aus (a + b) in c.
ad + bd das Product aus (a + b) in d.

ac + bc + ad + bd, die Summe der Partialproducte oder das Hauptproduct.

2. Man multiplicire a + b in a + b.

a + b

a † b
a † b

ab † bb
aa † ab

aa † 2ab † bb; denn wenn man ab zu ab addiret, so bekommt man 2ab.

3. Man multiplicire a † b in a — b.

a † b
a — b

aa † ab das Product aus (a † b) in a
— ab — bb das Product aus (a † b) in — b

aa † ab — ab — bb
ab — ab = o

F. aa — bb.

4. Man soll 2a — ab † 4bc in 2a — bc multipliciren.

2a — ab † 4bc
2a — bc

4aa — 2aab † 8abc
— 2abc † abbc — 4bbcc

4aa — 2aab † 6abc † abbc — 4bbc.

24.

Weil das Product aus ab in (2 † b — c) = 2ab † abb — abc, so kann man auch umgekehrt, wenn es die Bequemlichkeit oder andere Umstände erfordern, die Größen, die in einigen oder allen Theilen eines vielgliedrigen Products vorkommen, herausnehmen, und die übrigen Factoren, in eine Klammer eingeschlossen, oder eine Querlinie darüber gezogen, entweder vor oder hinter ihren allgemeinen

Eben so muß nun auch allgemein — a in — b = + ab oder = ab seyn. Und überhaupt ist das Product aus zwey negativen Größen positiv.

22.

Hieraus läßt sich nun für alle drey Multiplicationsfälle folgende allgemeine Regel abstrahiren. Haben die beyden Factoren gleiche Zeichen, so wird das Product positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird das Product negativ.

23.

Nun ists leicht, auch solche Factoren in einander zu multipliciren, die aus mehreren Theilen bestehen, welche durch verschiedene Zeichen mit einander verbunden sind. Man multiplicirt nämlich den Multiplicandus in jeden Theil des Multiplicators und addirt dann, wie bey der Multiplication in Zahlen, die Partialproducte. Dabey ists gleichviel, ob man von der linken oder rechten Hand den Anfang macht.

1. Man multiplicire a + b in c + d, oder (a + b) (c + d)

a + b
c + d

ac + bc das Product aus (a + b) in c.
ad + bd das Product aus (a + b) in d.

ac + bc + ad + bd, die Summe der Partialproducte oder das Hauptproduct.

2. Man multiplicire a + b in a + b.

a + b

a † b
a † b

aa † ab
ab † bb

aa † 2ab † bb; denn wenn man ab zu ab addiret, so bekommt man 2ab.

3. Man multiplicire a † b in a — b.

a † b
a — b

aa † ab das Product aus (a † b) in a
— ab — bb das Product aus (a † b) in — b

aa † ab — ab — bb
ab — ab = o

F. aa — bb.

4. Man soll 2a — ab † 4bc in 2a — bc multipliciren.

2a — ab † 4bc
2a — bc

4aa — 2aab † 8abc
— 2abc † abbc — 4bbcc

4aa — 2aab † 6abc † abbc — 4bbc.

24.

Weil das Product aus ab in (2 † b — c) = 2ab † abb — abc, so kann man auch umgekehrt, wenn es die Bequemlichkeit oder andere Umstände erfordern, die Größen, die in einigen oder allen Theilen eines vielgliedrigen Products vorkommen, herausnehmen, und die übrigen Factoren, in eine Klammer eingeschlossen, oder eine Querlinie darüber gezogen, entweder vor oder hinter ihren allgemeinen

Beweis.

$x^2 = xx$

$x^3 = xxx$

---

F. $x^2 . x^3 = xx . xxx$

$xx . xxx = xxxxx$

$xxxxx = x^5$. §. 26.

---

F. $x^2 . x^3 = x^5$.

Ferner. Das Product aus $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Desgleichen das Product aus $a^3 . a^{-\frac{1}{2}} = a^{3-\frac{1}{2}}$

$= a^{2\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$.

und aus $2a^x m^2 . am^{y-1} = 2a^{x+1} m^{2+y-1}$

$= 2a^{x+1} m^{y+1}$.

29.

2. Wenn die Potenzen ungleichnahmig sind.

In diesem Fall wird die Multiplication bloß angedeutet, indem man die gegebenen Potenzen durchs Multiplicationszeichen mit einander verbindet, oder auch ohne dasselbe neben einander setzt.

z. B. $a^2$ multiplicirt in $m^3$ ist $a^2 . m^3$ oder $a^2 m^3$.

$x^n$ multiplicirt in $y^{m+1}$ ist $x^n . y^{m+1}$ oder $x^n y^{m+1}$.

30.

Nun ists leicht auch folgende Ausdrücke zu multipliciren.

1. $x^m + 2y^{2n} z^4$ multiplicirt in $a^{m-1} x^{m-2}$

$= a^{m-1} x^{m+2+m-2} y^{2n} z^4$

$= a^{m-1} x^{2m} y^{2n} z^4$.

2. Man soll $am^2 - 2^3 + x^{\frac{1}{2}}$ multipliciren

in $2^3 - x^n$

---

$2^3 am^2 - 2^6 + 2^3 x^{\frac{1}{2}}$

$- am^2 x^n + 2^3 x^n - x^{n+\frac{1}{2}}$

---

Product $2^3 am^2 - 2^6 + 2^3 x^{\frac{1}{2}} - am^2 x^n + 2^3 x^n - x^{n+\frac{1}{2}}$

3. Man

3. Man multiplicire

$$ax^2 + m^3y^4 - p^5q^6$$
$$\text{in } m^3y^4 + p^5q^6$$

$$am^3x^2y^4 + m^6y^8 - m^3p^5q^6y^4$$
$$+ ap^5q^6x^2 + m^3p^5q^6y^4 + p^{10}q^{12}.$$

d. Prod. ist $am^3x^2y^4 + m^6y^8 + ap^5q^6x^2 - p^{10}q^{12}$.

31.

Soll eine Potenzgröße in eine noch höhere Potenz erhoben werden, so multiplicirt man ihren Exponenten in den neuen Exponenten. So ist z. B.

1. Die dritte Dignität von $x^2 = x^{2 \cdot 3} = x^6$.

Beweis.

Die dritte Dignität von $x^2$ ist $x^2x^2x^2$

$x^2x^2x^2 = x^{2+2+2}$ §. 28.

$x^{2+2+2} = x^6$

F. die dritte Dignität von $x^2 = x^6$.

2. Die zweyte Dignität von $3^2$ ist $= 3^4$.

Beweis.

$3^2 = 9$.

Folglich ist die zweyte Dignität von $3^2 = 9^2$

$9^2 = 81$.

Es ist aber auch $3^4 = 81$.

Folglich ist die zweyte Dignität von $3^2 = 3^4$.

3. Die mte Dignität von $a^{x-1}$ ist $= a^{(x-1)m}$
$= a^{mx-m}$.

31.

Soll ein aus mehreren Factoren bestehendes Product in eine Potenz erhoben werden, so schließt man die Factoren dieses Products in Klammern ein, und setzt den Exponenten der Dignität, in

welche das Product erhoben werden soll, außerhalb der Klammern an seinen Ort, oder man erhebt wirklich jeden Factor in die verlangte Dignität. So ist z. B.

1. Die dritte Dinität von $mn = (mn)^3$ oder $m^3n^3$.
2. Die nte Dignität von $abx = (abx)^n$ oder $a^nb^nx^n$.
3. Die fünfte Dignität von $a^2x = (a^2x)^5$ oder $a^{10}x^5$.
4. Die zweyte Dignität von $2 . 3 = (2 . 3)^2$ oder $2^2 . 3^2 = 4 . 9 = 36$, und $6^2$ auch $= 36$.

### Anmerkung.

Die Klammern dürfen in diesem Fall nicht wegbleiben, weil der Ausdruck $mn^3$ ganz etwas anders bedeutet, als $(mn)^3$. Jener Ausdruck sagt: m soll in die dritte Dignität von n, der letzte aber: die dritte Dignität von m soll in die dritte Dignität von n multiplicirt werden.

### 33.

Soll eine aus mehrern durch das Additions- oder Subtractionszeichen mit einander verbundenen Theilen bestehende Größe in eine gewisse Dignität erhoben werden, so schließt man alle die zu der Größe gehörende Theile ein, und setzt den Exponenten oben hin an seinen Ort. So bedeutet z. B. $(a + b)^2$ so viel, als die Größe $a + b$ soll in sich selbst multiplicirt und dadurch in die zweyte Dignität erhoben werden. Auch hier darf die Klammer nicht wegbleiben; denn $a + b^2$ würde bloß heißen, die Summe aus a und dem Quadrat oder der zweyten Dignität von b. Es ist aber

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b)$$
$$= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\,(a+b)$$
$$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$
$$(a+b)^5 = (a+b)^4\,(a+b)$$
$$= (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\,(a+b)$$
$$= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

## 4. Das Dividiren.

### 34.

Will man bloß anzeigen, daß eine Größe durch eine andere dividirt werden soll, so kann dies auf eine doppelte Art geschehen. Man setzt entweder den Divisor hinter den Dividendus, dazwischen aber das Divisionszeichen (:); oder man schreibt beyde Größen als einen Bruch, den Divisor unter den Dividendus. Daß z. B. b durch a dividirt werden soll, wird folgendergestalt angedeutet. $\frac{b}{a}$ oder b : a.

### 35.

Dividirt man ein Product aus zwey Factoren durch den einen Factor, so erhält man den andern Factor zum Quotienten. II. §. 18. Es ist also $\frac{ab}{a} = b$.

Eben die Bewandniß hat es, wenn ein Product aus mehrern Factoren durch einen oder zwey dieser Factoren dividirt wird. Z. B. $\frac{abc}{ac} = b$; $\frac{abc}{c} = ab$.

Es enthält also der Quotient alle Größen des Dividendus, ausgenommen die Größen des Divisors. Sind daher die Größen des Divisors nicht

auch im Dividendus enthalten, so begnügt man sich in diesem Fall die Division der Größen nach §. 34. bloß anzudeuten.

Man unterscheidet aber bey der Division vier besondere Fälle; denn entweder sind Dividendus und Divisor positive oder negative Größen, oder der Dividendus ist positiv und der Divisor negativ; oder der Fall ist umgekehrt.

36.

1. Wenn Dividendus und Divisor einerley Zeichen haben.

a. Wenn beyde Plusgrößen sind.

In diesem Fall ist der Quotient auch positiv; denn man soll hier untersuchen, wie vielmahl eine positive Größe in einer andern positiven Größe enthalten sey. Es ist also hier kein Grund vorhanden warum der Quotient anders als positiv seyn sollte.

Es ist also $\frac{am}{a} = m$, und $\frac{4bdx}{2d} = 2bx$.

37.

b. Wenn der Dividendus und Divisor Minusgrößen sind.

Auch in diesem Fall ist der Quotient positiv. Denn der Dividendus ist das Product aus dem Divisor in den Quotienten. Man erhält aber auf keine andere Art ein negatives Product, als wenn man einen negativen Factor in einen positiven multiplicirt. Soll nun aus dem gegebenen negativen Divisor ein negativer Dividendus entstehen, so muß ja der negative Divisor in einen positiven Quotienten multiplicirt werden. Der Quotient muß also in diesem Fall nothwendig positiv seyn. Es ist also

$\frac{-am}{-a}$

$\frac{-am}{-a} = m$, und $\frac{-4bdx}{-2d} = 2bx$.

$\frac{-32}{-4} = 8$; denn $8 \times -4 = -32$.

38.

2. Wenn Dividendus und Divisor verschiedene Zeichen haben.

a. Wenn der Dividendus positiv, der Divisor aber negativ ist.

Hier ist der Quotient negativ; denn weil der Dividendus ein Factum ist aus dem Divisor in den Quotienten, so muß nothwendig der Quotient negativ seyn, da der Divisor negativ ist, weil man sonst kein positives Factum erhalten würde. Es ist also

$\frac{am}{-a} = -m$, und $\frac{4bdx}{-2d} = -2bx$.

$\frac{32}{-4} = -8$, denn $-8 \times -4 = 32$.

Wollte man den Quotienten $= m$ setzen, so wäre das Product aus dem Quotienten m in den Divisor $-a = -am$ §. 20. Es ist aber der gegebene Dividendus, als das Product aus dem Quotienten in den Divisor positiv oder $+am$, folglich muß der Quotient negativ seyn, denn $-a$ multiplicirt in $-m$ ist $= +am$ §. 21.

39.

b. Wenn der Dividendus negativ, der Divisor aber positiv ist.

Auch in diesem Fall muß der Quotient negativ seyn, weil man auf keine andere Art ein negatives Factum erhält, als wenn man einen positiven Factor in einen negativen multiplicirt. Da nun der gegebene Divisor, als der eine Factor, positiv

ist, so muß der Quotient, als der andere Factor, negativ seyn. Es ist also

$\frac{-am}{a} = -m$, und $\frac{-4bdx}{2d} = -2bx$.

$\frac{-32}{4} = -8$, deren $-8 \times 4 = -32$.

40.

Aus diesen besondern Fällen läßt sich nun folgende allgemeine Regel für alle vier Divisionsfälle abstrahiren. Haben Dividendus und Divisor einerley Zeichen, so ist allemahl der Quotient positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so ist der Quotient allemahl negativ.

41.

Soll eine aus mehreren durch das Additionszeichen verbundenen Theilen bestehende Größe durch eine andere Größe dividirt werden, so kann man entweder die Summe dieser Theile, oder jeden Theil besonders dividiren, und dann werden im letzten Fall die erhaltenen einzelnen Quotienten addirt; die Summe dieser einzelnen Quotienten ist gleich dem Quotienten aus der Summe aller Theile des Dividendus. So ist z. B.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} = \frac{a+b+c}{x}$$

Beweis.

Man setze $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} = q$

so ist $a + b + c = qx$ (x

F. $\frac{a+b+c}{x} = q$. Es war aber

$q = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$

F. $\frac{a+b+c}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$.

42.

42.

Gleiche Bewandniß hats, wenn der Dividendus aus solchen Theilen besteht, wo der eine von dem andern soll abgezogen werden. Auch hier ists einerley, ob man die wirkliche Differenz beyder Theile, oder jeden Theil besonders durch den gegebenen Divisor dividirt, und im letzten Fall den Quotienten aus der Subtrahendusgröße abzieht vom Quotienten aus der Minuendusgröße. So ist z. B.

$$\frac{12}{3} - \frac{6}{3} = \frac{12-6}{3}$$

denn $\frac{12}{3} - \frac{6}{3} = 4 - 2 = 2$;

und $\frac{12-6}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Oder $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.

Beweis.

Man setze $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = q$

so ist $a - b = mq$.

F. $\frac{a-b}{m} = q$; es war aber

$$q = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

F. $\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{a}{m}$.

43.

Besteht der Dividendus aus solchen Theilen, die durch das Additions- und Subtractionszeichen verbunden sind, so verhält sich die Sache eben so. Es ist nämlich auch hier

$\frac{16}{4} - \frac{8}{4} - \frac{12}{4} + \frac{20}{4} = \frac{16-8-12+20}{4}$

Denn $\frac{16}{4} - \frac{8}{4} - \frac{12}{4} + \frac{20}{4} = 4 - 2 - 3 + 5 = 4$

und $\frac{16}{4} \frac{8-12+20}{4} = \frac{36}{4} \frac{20}{4} = \frac{16}{4} = 4$

Od. wenn allg. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} + \frac{c}{x} - \frac{d}{x} = q$

so ist auch $a - b + c - d = qx$, nun war oben

$q = \frac{a}{x} - \frac{b}{x} + \frac{c}{x} - \frac{d}{x}$

Folglich $\frac{a-b+c-d}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x} + \frac{c}{x} - \frac{d}{x}$.

44.

Nun werden sich auch solche Größen dividiren lassen, worin jeder Theil ein Factum aus dem Divisor ist, wenn nämlich der Divisor in dem Dividendus aufgehen soll.

Man soll z. B. $4amnx - 12apqx + 20ax$ dividiren durch $4ax$:

Man setze den Divisor unter jeden Theil des Dividendus und verbinde die Theile des Quotienten in der Ordnung durch eben die Zeichen, wenn der Divisor eine Plusgröße ist. Also

$\frac{4amnx}{4ax} - \frac{12apqx}{4ax} + \frac{20ax}{4ax} = mn - 3pq + 5.$

Ist aber der Divisor eine Minusgröße, so ist

$\frac{4amnx}{-4ax} - \frac{12apqx}{-4ax} + \frac{20ax}{-4ax} = -mn + 3pq - 5.$

Man kann aber auch $4ax$ als den gemeinschaftlichen Factor aller Theile des Dividendus nach §. 24. davon trennen, dann ist

$4amnx - 12apqx + 20ax = (mn - 3pq + 5)\,4ax.$

Folgl.

Folgl. $\frac{4amnx - 12apqx + 20ax}{4ax} = \frac{(mn - 3pq + 5)\,4ax}{4ax}$

$= mn - 3pq + 5.$

und $\frac{4amnx - 12apqx + 20ax}{-4ax} = \frac{(mn - 3pq + 5)\,4ax}{-4ax}$

$= (mn - 3pq + 5).-1$

$= -mn + pq - 5.$

45.

Etwas schwerer ist der Fall, wenn der Divisor auch aus mehrern durch das Additions- und Subtractionszeichen verbundenen Größen besteht, wenigstens erfordert dieser Fall mehr Aufmerksamkeit. Man verfährt indessen dabey, wie bey der Division mit großen Zahlen. Man untersucht insbesondere, in welchem Theil des Dividendus dieser oder jener Theil des Divisors als Factor enthalten ist, die übrigen in diesem Theil des Dividendus enthaltenen Größen setzt man in die Stelle des Quotienten, wobey man aber sorgfältig auf die Zeichen Rücksicht nehmen muß. Man soll z. B.

$9aabb - 4bbdd + 20bdmnx - 25mmnnxx$ dividiren durch $3ab + 2bd - 5mnx$.

$3ab + 2bd - 5mnx$

$9aabb - 4bbdd + 20bdmnx - 25mmnnx \mid 3ab - 2bd + 5mnx.$
$9aabb + 6abbd - 15abmnx$
$- \quad - \quad +$

$- 6abbd - 4bbdd + 20bdmnx + 15abmnx - 25mmnnxx$
$- 6abbd - 4bbdd + 10bdmnx$
$+ \quad + \quad -$

$10bdmnx + 15abmnx - 25mmnnxx$
$15abmnx + 10bdmnx - 25mmnnxx$
$- \quad - \quad +$

o o o

Des Divisors Theil $3ab$ ist in $9aabb$ enthalten $3ab$mahl. Das Product aus dem gefundenen

Quo-

Quotienten 3ab in den gegebenen Divisor 3ab † 2bd — 5mnx = 9aabb † 6abbd — 15abmnx wird vom Dividendus abgezogen, oder die Zeichen dieses Products werden verwandelt und dann nach §. 5. addirt. Was übrig bleibt wird unter die Linie gesetzt, u. s. w.

Anmerkung.

Die Glieder des Products aus dem gefundenen Quotienten in den Divisor, welche sich im Dividendus nicht finden, werden mit dem veränderten Zeichen in Rest gebracht, dies ist oben der Fall mit — 6abbd † 15abmnx.

Ferner ist 3ab in — 6abbd enthalten — 2bd. Das Product aus dem Divisor in diesen gefundenen zweyten Theil des Quotienten = — 6abbd — 4bbdd † 10bdmnx wird von dem gebliebenen Rest abgezogen, oder die Zeichen des Products verwandelt und anstatt dessen addirt. Der bleibende Rest wird wieder unter die Linie gesetzt.

Endlich ist 3ab in 15abmnx enthalten 5mnx mahl. Das Product aus dem Divisor in diesen gefundenen dritten Theil des Quotienten = 15abmnx † 10bdmnx — 25mmnnxx wird wieder von den gebliebenen Rest abgezogen, oder anstatt dessen nach veränderten Zeichen des Products zum Rest addirt, da denn in diesem Fall alles aufgeht.

Der Quotient ist also 3ab — 2bd † 5mnx.

46.

Man kann auch Brüche durch Buchstabengrößen ausdrücken. So kann z. B. $\frac{a}{b}$ jeden ächten und unächten Bruch bezeichnen. Ist aber der Zähler dem Nenner gleich, so ist der Bruch = 1, weil

weil der Nenner im Zähler wirklich einmahl enthalten ist. Daher sind auch alle solche Brüche, deren Nenner dem Zähler gleich ist, unter einander gleich, mithin $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{m}{m}$ &c $= 1$. Man kann aber mit allen diesen allgemeinen Brüchen eben die Veränderungen vornehmen, als mit den Zahlenbrüchen.

47.

Multipliciret man Zähler und Nenner eines Bruchs in einerley dritte Größe, so wird das Verhältniß des Zählers zum Nenner nicht aufgehoben, folglich der Werth des Bruchs nicht geändert; eben so auch, wenn man beyde Theile des Bruchs durch einerley dritte Größe dividirt. Es ist daher $\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$.

48.

Soll ein Bruch und eine ganze Größe addirt werden, so verwandelt man die ganze Größe auch in einen Bruch, indem man sie in den Nenner des gegebenen Bruchs multiplicirt, und durch denselben Nenner auch dividirt.

$$\text{Z. B. } \frac{a}{b} + m = \frac{a}{b} + \frac{bm}{b} = \frac{a+bm}{b}.$$

Beweis.

$$m = \frac{m}{1} \quad \text{(III. §. 57)}$$

$$\frac{m}{1} = \frac{m.b}{1.b} = \frac{bm}{b} \quad \text{§. 46.}$$

$$\text{F. } \frac{a}{b} + \frac{bm}{b} = \frac{a+bm}{b}.$$

49.

49.

Sollen Brüche addirt werden, so haben sie

1. entweder gleiche Nenner.

In diesem Fall addirt man ihre Zähler, und giebt der Summe der Zähler den gemeinschaftlichen Nenner.

$$\text{Z. B. } \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{n}{m} = \frac{a+b+n}{m}$$

2. Oder sie haben verschiedene Nenner.

In diesem Fall multiplicirt man jeden Zähler ins Product der Nenner der übrigen Brüche und giebt der Summe dieser neuen Zähler das Product aller Nenner zum Nenner.

$$\text{Z. B. } \frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{nm} = \frac{an+bm}{mn}.$$

$$\text{Desgleich. } \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{ansy + bmsy + mnsx + mnry}{mnsy}.$$

50.

Soll ein Bruch von einer ganzen Größe abgezogen werden, so verwandelt man den Minuendus ebenfalls in einen Bruch, indem man ihn in den Nenner des Subtrahendus multiplicirt, und das Product durch denselben Nenner auch dividirt, dann zieht man die Zähler von einander ab, und giebt dem Rest den Nenner des Subtrahendus.

$$\text{Z. B. } m - \frac{a}{b} = \frac{bm}{b} - \frac{a}{b} = \frac{bm-a}{b}.$$

Beweis.

$$m = \frac{m}{1} \text{ (III. §. 57.)}$$

$$\frac{m}{1} = \frac{m.b}{1.b} = \frac{bm}{b}. \text{ §. 46.}$$

$$\text{F. } m - \frac{a}{b} = \frac{bm}{b} - \frac{a}{b} = \frac{bm-a}{b}.$$

51.

51.

Sollen Brüche von einander abgezogen werden, so sind

1. entweder ihre Nenner gleich;

Dann zieht man den Zähler des Subtrahendus ab vom Zähler des Minuendus, und giebt der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner.

Z. B. $\frac{m}{n} - \frac{a}{n} = \frac{m-a}{n}$.

2. Oder sie haben verschiedene Nenner.

In diesem Fall bringt man sie vorher unter einerley Benennung, und verfährt wie vorhin.

Z. B. $\frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{bm-an}{bn}$.

Desgleichen $\frac{4n}{m} - \frac{6an}{x} = \frac{4nx-6amn}{mx}$.

Desgleichen $\frac{3am}{4n} - \frac{2am}{3xy} = \frac{9amxy-8amn}{12nxy}$.

52.

Ein Bruch wird in eine ganze Größe multiplicirt, wenn man bloß dessen Zähler in die gegebene ganze Größe multiplicirt. Uebrigens geben auch hier gleiche Zeichen der Factoren ein positives, ungleiche aber ein negatives Product. So ist z. B.

1. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$.

2. $(m + \frac{a}{b})\, x = \frac{mb+a}{b} \cdot x = \frac{bmx+ax}{b}$.

3. $(\frac{a}{m} + \frac{b}{m})\, x = \frac{ax+bx}{m}$.

4. $(\frac{a}{m} + \frac{b}{n})\, x = \frac{an+bm}{mn} \cdot x = \frac{anx+bmx}{mn}$.

5. $(m - \frac{a}{b})\, x = \frac{bm-a}{b} \cdot x = \frac{bmx-ax}{b}$.

6. $(\frac{m}{n} - \frac{a}{n})\, x = \frac{mx-ax}{n}$.

7. $(\frac{m}{n} - \frac{a}{b})\, x = \frac{bmx-anx}{bn}$.

53.

Brüche werden in einander multiplicirt, wenn man Zähler in Zähler und Nenner in Nenner multiplicirt; das Product ist ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Product der Zähler, dessen Nenner aber gleich dem Product der Nenner der zu multiplicirenden Brüche ist. So ist z. B.

1. Das Product aus $\frac{a}{b}$ in $\frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$.

Beweis.

Man setze $\frac{a}{b} = x$ und $\frac{m}{n} = y$.

so ist $a = bx$ und $m = ny$.

Ist aber $a = bx$

und $m = ny$.

so ist $am = bnxy$. (II. §. 12.)

F. $\frac{am}{bn} = xy$. (II. §. 15.) Nun aber war

$x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{m}{n}$

F. $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$

F. $\frac{am}{bn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$ (II. §. 3.)

2. Das Product aus $\frac{ax}{m} \cdot \frac{bc}{n} = \frac{abcx}{mn}$.

3. $\frac{a-x}{m} \cdot \frac{b-y}{n} = \frac{(a-x)(b-y)}{mn}$.

$(a-x)(b-y) = ab-bx-ay+xy$

F. $\frac{a-x}{m} \cdot \frac{b-y}{n} = \frac{ab-bx-ay+xy}{mn}$.

4. $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{fx}{y} = \frac{afmx}{bny}$.

54.

## 54.

Ein Bruch wird dividirt durch eine ganze Größe, wenn man den Nenner des Bruchs in den gegebenen Divisor multiplicirt. III. §. 51. Es ist daher z. B.

$\frac{a}{b}$ dividirt durch m oder $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}$.

### Beweis.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \quad \text{§. 47.}$$

m) ——————————

$$\text{F. } \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}. \quad \text{III. §. 51.}$$

## 55.

Sollen Brüche durch Brüche dividirt werden, so sind

1. entweder die Nenner ungleich.

In diesem Fall erhält man den Quotienten, wenn man das Product aus dem Zähler des Dividendus in den Nenner des Divisors durch das Product aus dem Nenner des Dividendus in den Zähler des Divisors dividirt; oder, welches eben das ist, wenn man den Divisor umkehrt, und dadurch die Division der Brüche in eine Multiplication verwandelt. Z. B. $\frac{a}{b}$ soll dividirt werden durch $\frac{m}{n}$. Dies wird folgendergestalt bezeichnet. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b}, \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$.

Beweis.

Man setze $\frac{a}{b} = x$

$\frac{}{}$ (b

so ist $a = bx$ II. §. 12.

Man setze ferner $\frac{m}{n} = y$

$\frac{}{}$ (n

so ist $m = ny$ II. §. 12.

F. $\frac{a}{m} = \frac{bx}{ny}$

$\frac{}{}$ (n

$\frac{an}{m} = \frac{bx}{y}$ §. 52.

b) $\frac{}{}$

F. $\frac{an}{bm} = \frac{x}{y}$ §. 54.

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n}$

F. $\frac{an}{bm} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n}$

$\frac{an}{bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}$

F. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} = \frac{an}{bm}$.

56.

2. Oder die Nenner sind gleich.

In diesem Fall erhält man den Quotienten, wenn man den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors dividirt. So ist z. B. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{a}{b}$.

Beweis.

$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{a}{m} \cdot \frac{m}{b}$ §. 55.

$\frac{a}{m} \cdot \frac{m}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

F. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{a}{b}$.

Des-

Desgleichen $\frac{a^2}{x} : \frac{2a}{x} = \frac{a^2}{x} \cdot \frac{x}{2a} = \frac{a^2x}{2ax} = \frac{a}{2}$.

57.

Soll eine ganze Größe durch einen Bruch dividirt werden, so verwandele man die ganze Größe des Dividendus in einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner giebt, dadurch wird dieser Fall auf den §. 55. reducirt.

Z. B. $m : \frac{a}{b} = \frac{m}{1} : \frac{a}{b} = \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bm}{a}$.

58.

Es verdienet hier auch diejenige Behandlung der Brüche erwähnt zu werden, vermittelst welcher man den Werth eines Bruchs durch eine unendliche Reihe ausdrückt, weil in der höhern Geometrie besondere Fälle vorkommen, wo dies seinen großen Nutzen hat.

Man kann sich nämlich den Nenner eines jeden Bruchs entweder als das Collect oder als die Differenz zweyer Größen vorstellen. So wäre nach dieser Vorstellungsart z. B. der Bruch $\frac{3}{5}$ entweder gleich $\frac{3}{3+2}$ oder gleich $\frac{3}{6-1}$. Dividirt man nun den Zähler wirklich durch den Nenner, so erhält man eine unendliche Reihe von Gliedern, deren Summe den Werth des gegebenen Bruchs sehr nahe kommt.

Um aber eine allgemeine Formel für alle in eine unendliche Reihe aufzulösende Brüche zu erhalten, nehme man für den ersten Fall den Bruch $\frac{a}{m+n}$, und für den andern den Bruch $\frac{a}{m-n}$.

1. Wenn man durch $\frac{a}{m+n}$ alle mögliche Brüche bezeichnet.

$$\begin{array}{l|l} a & \frac{a}{m} - \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} - \frac{an^3}{m^4} + \ldots \text{ in infinitum.} \\ a + \frac{an}{m} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{an}{m} \\ \hline -\frac{an}{m} - \frac{an^2}{m^2} \\ + \quad + \\ \hline \frac{an^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3} \\ - \quad - \\ \hline -\frac{an^3}{m^3} - \frac{an^4}{m^4} \\ + \quad + \\ \hline \frac{an^4}{m^4} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Man dividirt nämlich

1) a durch m. Der Quotient ist $\frac{a}{m}$. Das Product aus $\frac{a}{m}$ in $(m + n)$ ist $= a + \frac{an}{m}$, und wird abgezogen von a, oder dafür, wenn man die Zeichen verwandelt, addirt. Es bleibt aber zur Differenz $\frac{an}{m}$.

2. $-\frac{an}{m}$ durch m. Der Quotient ist $-\frac{an}{m^2}$. Das Product aus $-\frac{an}{m^2}$ in $(m + n) = -\frac{an^2}{m^2}$ wird wieder abgezogen, oder dafür, wenn man das Minus-

Minuszeichen ins Pluszeichen verwandelt, addirt. Die Differenz ist $\frac{an^2}{m^2}$.

3. $\frac{an^2}{m^2}$ durch m. Der Quotient ist $\frac{an^2}{m^3}$ mit dem Zeichen (+). Das Product aus $\frac{an^2}{m^3}$ in $(m + n) = \frac{an^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3}$ wird wieder abgezogen. Die Differenz ist $- \frac{an^3}{m^3}$ u. s. w.

4. $- \frac{an^3}{m^3}$ durch m. Der Quotient ist $- \frac{an^3}{m^4}$, u. s. w.

Man braucht nun die Division nicht weiter fortzusetzen, weil man schon aus den gefundenen vier Gliedern das Gesetz erkennen kann, nach welchem sich die folgenden Glieder des Quotienten formiren lassen.

Es findet sich nämlich der Zähler a des gegebenen Bruchs $\frac{a}{m+n}$ in der ersten Potenz als Zähler in allen Gliedern, und ist vom zweyten Gliede an in eine Dignität des zweyten Theils n des gegebenen Nenners $m + n$ multiplicirt, deren Exponent gleich ist der Zahl des Gliedes weniger Eins. Die Nenner aber der Glieder bestehn insgesammt aus einer Dignität des ersten Theils m des Nenners des zu verwandelnden Bruchs, deren Exponent immer mit der Zahl des Gliedes wächst. Die Zeichen aber der Glieder wechseln so ab, daß die ungeraden Glieder das Zeichen Plus, die geraden aber das Zeichen Minus erhalten. Wollte man daher die Reihe bis zum zehnten und eilften Gliede fortsetzen, so würden diese beyden Glieder seyn $- \frac{an^9}{m^{10}} + \frac{an^{10}}{m^{11}}$.

59.

2. Wenn der Bruch $\frac{a}{m-n}$ alle möglichen Brüche bezeichnet.

$$\begin{array}{l|l} a & \frac{m-n}{\frac{a}{m} + \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} + \frac{an^3}{m^4} + \ldots \text{ in infinitum.}} \\ a - \frac{an}{m} & \\ - + & \\ \hline \frac{an}{m} & \\ \frac{an}{m} - \frac{an^2}{m^2} & \\ - + & \\ \hline \frac{an^2}{m^2} & \\ \frac{an_2}{m^2} - \frac{an^3}{m^3} & \\ - + & \\ \hline \frac{an^3}{m^3} & \\ \frac{an^3}{m^3} - \frac{an^4}{m^4} & \\ - + & \\ \hline \frac{an^4}{m^4} \text{ u. s. w.} & \end{array}$$

Man dividirt nämlich wie im vorigen Fall, und zieht das Product aus dem jedesmahligen Theil des Quotienten in den Nenner des Bruchs als Divisor von dem gebliebenen Rest ab. Man kann indessen schon aus einigen gefundenen Gliedern des Quotienten das Gesetz erkennen, nach welchem sich auch ohne weitere Rechnung die folgenden Glieder formiren lassen. Das Gesetz ist hier eben dasselbe, nur daß die Glieder der Reihe insgesammt durch das Zeichen Plus mit einander verbunden werden. Der

Grund davon ist auch leicht einzusehen; denn im ersten Fall §. 58. wurde der Zähler durch eine Größe dividirt, welche kleiner war als der gegebene Nenner, mithin fiel der erste Theil des Quotienten zu groß aus, daher mußte ein zweyter Theil gesucht und dieser von dem ersten abgezogen werden; nun aber war die Differenz beyder Theile wieder zu klein, daher mußte ein dritter Theil gesucht und zu jener Differenz der beyden ersten Theile addirt werden u. s. w.

In diesem Fall aber wurde der Zähler durch eine Größe dividirt, welche größer war, als der gegebene Nenner, es fiel folglich gleich der erste Theil des Quotienten zu klein aus, daher mußte ein zweyter Theil gesucht und zu jenem hinzugethan werden, und da die Summe dieser beyden Theile noch zu klein war, so mußte noch ein dritter Theil gesucht und zu jenen hinzugethan werden, u. s. w.

Man sieht hieraus, daß man in beyden Fällen genau genommen nie auf ein letztes Glied kommen kann, weil im ersten Fall nach Abziehung des jedesmahligen letzten Gliedes der Rest immer etwas kleiner, nach Hinzuthuung aber des jedesmahligen letzten Gliedes die Summe wieder etwas größer wird, als der eigentliche Werth des gegebenen Bruchs ist. In diesem Fall aber wird die Summe vieler tausend Glieder immer noch um etwas kleiner seyn, als der Werth des gegebenen Bruchs. Indessen ist schon bey der Summe auch nur einiger Glieder der Unterschied so klein, daß er als Null betrachtet werden kann.

## 60.

### Anwendung.

Wollte man z. B. den Bruch $\frac{3}{6}$ durch eine solche unendliche Reihe nach §. 58. ausdrücken, so setze man anstatt $\frac{3}{6}$ den Bruch $\frac{3}{5+1}$, so ist in der allgemeinen Formel $a = 3$, $m = 5$ und $n = 1$, folglich

$$\frac{3}{6} = \frac{3}{5} - \frac{3.1}{5^2} + \frac{3.1^2}{5^3} - \frac{3.1^3}{5^4} + \frac{3.1^4}{5^5} - \frac{3.1^5}{5^6} + \frac{3.1^6}{5^7} - \ldots\ldots$$

oder $\frac{3}{6} = \frac{3}{5} - \frac{3}{25} + 1\frac{3}{25} - 6\frac{3}{25} + 31\frac{3}{25} - 156\frac{3}{25} + 781\frac{3}{25} - \ldots\ldots$

Verwandelt man alle diese Brüche in Decimalbrüche, so ist

$0{,}5 = 0{,}6 - 0{,}12 + 0{,}024 - 0{,}00481 + 0{,}00096 - 0{,}000192 + 0{,}0000384 - \ldots\ldots$

Vergleicht man nun den gegebenen Bruch $\frac{3}{6}$ oder $0{,}5$
mit dem ersten Gliede der Reihe $0{,}6$, so ist dies um $0{,}1$ größer
zieht man daher das 2te Glied $0{,}12$ wirklich ab,
so ist der Rest $0{,}48$ um $0{,}02$ wieder kleiner
setzt man aber das 3te Glied $0{,}024$ hinzu
so ist die Summe $0{,}504$ um $0{,}004$ wieder größer
zieht man daher das 4te Glied $0{,}0048$ wieder ab,
so ist der Rest $0{,}4992$ um $0{,}0008$ wieder kleiner;
thut man aber das 5te Glied $0{,}00096$ wieder hinzu,
so wird die Summe $0{,}50016$ um $0{,}00016$ wieder größer
zieht

zieht man aber das 6ste Glied 0,000192 wieder ab,

so wird der Rest 0,499968 um 0,000032
wieder kleiner

setzt man daher das 7te Glied 0,0000384 noch hinzu

so wird die Summe 0,5000064 um 0,0000064 wieder größer als der gegebene Bruch $\frac{3}{6}$ oder 0,5. Man kann aber demohngeachtet ohne Nachtheil die Summe jener Reihe anstatt des zu verwandelnden Bruchs $\frac{3}{6}$ oder 0,5 setzen, da der Unterschied so sehr unbedeutend ist, und nach Abziehung des folgenden Gliedes noch unbedeutender werden würde, wenn man die Reihe noch verlängern wollte.

Wollte man aber z. B. den Bruch $\frac{5}{8}$ durch eine unendliche Reihe nach der Vorstellung §. 59. ausdrücken, so setze man anstatt $\frac{5}{8}$ etwa den Bruch $\frac{5}{10-2}$; dann ist in der Formel

$a = 5$, $m = 10$ und $n = -2$, folglich

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{10} + \frac{5 \cdot 2}{10^2} + \frac{5 \cdot 2^2}{10^2} + \frac{5 \cdot 2^3}{10^4} + \frac{5\ 2^4}{10^5} + \ldots\ldots$$

oder $\frac{5}{8} = \frac{5}{10} + \frac{10}{100} + \frac{20}{1000} + \frac{40}{10000} + \frac{80}{100000} + \ldots\ldots$

oder $\frac{5}{8} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000} + \ldots\ldots$

oder $\frac{5}{8} = 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}004 + 0{,}0008 + \ldots\ldots$

Nun ist $0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}004 + 0{,}0008 + \ldots\ldots$

$= 0{,}6248.$

---

Folgl. $\frac{5}{8} = 0{,}6248.$

Verwandelt man aber den gegebenen Bruch $\frac{5}{8}$ auch in einen Decimalbruch, so ist $\frac{5}{8} = 0{,}625$; folglich ist die Summe jener Reihe, ob sie gleich nur aus fünf Gliedern bestand, doch nur um 0,0002 kleiner, als der gegebene Bruch selbst.

61.

Sollen Potenzgrößen durch Potenzgrößen dividirt werden, so unterscheidet man auch hier zwey Fälle; denn es sind entweder die Potenzen gleichnahmig oder ungleichnahmig.

1. Wenn Dividendus und Divisor gleichnahmige Potenzen sind.

Man darf hier nur den Exponenten des Divisors von dem Exponenten der Dignität des Dividendus abziehen, so ist die Wurzel mit der Differenz beyder Exponenten der gesuchte Quotient. So ist

1. z. B. $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

Denn $2^5 = 32$ und $2^3 = 8$.

---

F. $\frac{2^5}{2^3} = \frac{32}{8} = 4 = 2^2$.

2. Eben so ist allgemein $a^4 : a^2 = a^{4-2} = a^2$.

Beweis.

$a^4 = aaaa$

$a^2 = aa$.

---

F. $\frac{a^4}{a^2} = \frac{aaaa}{aa} = aa = a^2$.

3. Desgleichen $x^m : x^n = x^{m-n}$.

62.

Eine Potenzgröße durch sich selbst dividirt ist $= 1$; weil aber auch eine solche Potenzgröße durch sich selbst dividirt gleich ist der Wurzel mit dem Exponenten der Dignität 0, so ist jede Größe in der Dignität 0 allemahl $= 1$.

z. B. $\frac{x}{x} = \frac{x^1}{x^1} = x^{1-1} = x^0$;

Es ist aber auch $\frac{x}{x} = 1$

---

F. $x^0 = 1$.

63.

Ist der Exponent des Divisors größer, als der Exponent der Dignität des Dividendus, so ist der Quotient gleich der Wurzel mit einem negativen Exponenten.

So ist z. B. $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$.

Weil aber auch $\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 . a^2}$

$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 = 1$. §. 62.

---

F. $\frac{a^3}{a^3 . a^2} = \frac{1}{a^2}$

---

F. $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$

Oben war $\frac{a^3}{a^5} = a^{-2}$

---

F. $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$.

Hieraus folgt: Wenn der Dividendus 1, der Divisor aber eine Potenzgröße ist, so ist der Quotient allemahl gleich dem Divisor mit seinem Exponenten, dessen Zeichen demjenigen entgegen gesetzt ist, welches er im Divisor hatte.

Es ist also $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$

denn $\frac{1}{x^m} = \frac{1 . x}{x^m . x} = \frac{x^1}{x^m x^1} = \frac{x^1}{x^{m+1}} = x^{1-m-1} = x^{-m}$.

Umgekehrt kann man nun auch $\frac{1}{x^m}$ wieder anstatt $x^{-m}$ setzen.

§. 64.

64.

**2. Wenn Divisor und Dividendus ungleichnahmige Potenzen sind.**

In diesem Fall wird die Division entweder bloß angedeutet, oder man multiplicirt den Dividendus in den Divisor, so daß nun des letztern positiver Exponent negativ wird, oder überhaupt, daß alsdann das Zeichen des Exponenten des Divisors ins entgegengesetzte verwandelt wird. Z. B. $a^3$ soll dividirt werden durch $m^4$.

$$\frac{a^3}{m^4} = a^3 m^{-4}.$$

Beweis.

$$\frac{a^3}{m^4} = a^3 \cdot \frac{1}{m^4}$$

$$\frac{1}{m^4} = m^{-4} \quad \text{§. 63.}$$

$$\text{F. } \frac{a^3}{m^4} = a^3 m^{-4}.$$

Desgleichen $\frac{x^m}{y^m} = x^m \frac{1}{y^m} = x^m y^{-m}$.

65.

**Noch einige zusammengesetzte Fälle.**

1) $\frac{a^m x^{-4}}{a^2 y^n} = a^{m-2} x^{-4} \frac{1}{y^n} = a^{m-2} x^{-4} y^{-n}$.

2) $\frac{a^m x^{-\frac{1}{2}} y^3}{a^{2m} x . z^3} = a^{-m} x^{-\frac{1}{2}-1} y^3 z^{-3} = a^{-m} x^{-\frac{3}{2}} y^3 z^{-3}$.

3) $\frac{a^x m n^{\frac{1}{2}}}{a^x m^{\frac{1}{2}} n} = a^{x-x} m^{1-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}-1} = a^0 m^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$.

4) $\frac{a^m x^{\frac{1}{2}} y^{m-1}}{x y^{m-2}} = a^m x^{\frac{1}{2}-1} y^{m-1-m+2} = a^m x^{-\frac{1}{2}} y$.

5)

5) $\frac{a^n x^3 y^{\frac{m}{n}}}{x^3 y^n z^n} = a^n x^{3-3} y^{\frac{m}{n}-n} z^{-n} = a^n y^{\frac{m-n^2}{n}} z^{-n}$.

# Sechstes Kapitel.

## Von den Potenzen und vom Ausziehen der Wurzeln.

### 1. Von den Potenzen.

Betrachtet man die Potenzen des Binomiums $a + b$ (V. §. 33.) nämlich

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

so bemerkt man dabey folgende allgemeine Eigenschaften.

1. Jede Potenz besteht aus so viel Gliedern, als die Zahl ihres Exponenten Einheiten hat und noch eins darüber.

So besteht die dritte Potenz aus $3 + 1 = 4$ Gliedern.

Die fünfte Potenz aus $5 + 1 = 6$ Gliedern.

Folglich würde die zehnte Potenz aus $10 + 1$ oder 11 Gliedern bestehen, und wäre allgemein der Exponent $= m$, so würde von $(a+b)^m$ die Anzahl der Glieder $= m + 1$ seyn.

2. In jeder Potenz des Binomiums $a + b$ hat jeder Theil desselben den Exponenten der Dignität, in welche das ganze Binomium erhoben worden. So hat man

in der zweyten Potenz $a^2$ und $b^2$,

in

in der fünften Potenz $a^5$ und $b^5$, und zwar a mit dem jedesmahligen höchsten Exponenten im ersten, und b mit demselben Exponenten im letzten Gliede.

Außerdem aber hat man auch a so wohl als b mit allen übrigen niedrigern Exponenten, nämlich

in der zweyten Potenz a und b.
in der dritten Potenz $a^2$, a und b, $b^2$.
in der vierten Potenz $a^3$, $a^2$, a und b, $b^2$, $b^3$.
in der fünften Potenz $a^4$, $a^3$, $a^2$, a und b, $b^2$, $b^3$, $b^4$.

Man kann aber auch sagen: Jeder Theil des Binomiums befindet sich in jeder Potenz desselben auch mit dem Exponenten o, und zwar $b^\circ$ im ersten und $a^\circ$ im letzten Gliede. Weil aber $a^\circ = 1$ und $b^\circ = 1$ (V. §. 62.) so werden diese nicht ausgedruckt.

3. Beyde Theile des Binomiums sind in den Gliedern der Potenzen desselben als Factoren in einander multiplicirt, und zwar der erste Theil a mit dem jedesmahligen höchsten Exponenten in den andern Theil mit dem Exponenten o. Ferner a mit dem nächst niedrigern Exponenten in b mit dem Exponenten 1 u. s. w.

Es ist daher, ohne auf die Zahlen zu sehen, in welche die einzelnen Glieder zwischen dem ersten und letzten Gliede noch multiplicirt sind,

$$(a+b)^2 = a^2b^\circ + a^1b^1 + a^\circ b^2.$$
$$= a^2 1 + ab + 1.b^2.$$
$$= a^2 + ab + b^2.$$
$$(a+b)^3 = a^3b^\circ + a^2b^1 + a^1b^2 + a^\circ b^3.$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

$(a+b)^4$

$(a+b)^4 = a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4$
$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4.$
$(a+b)^5 = a^5b^0 + a^4b^1 + a^3b^2 + a^2b^3 + a^1b^4 + a^0b^5$
$= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5.$

Zugleich bemerkt man, daß die Summe der Exponenten beyder Factoren in jedem Gliede allemahl gleich ist dem jedesmahligen höchsten Exponenten. So ist in der fünften Potenz die Summe beyder Exponenten im zweyten Gliede $4 + 1 = 5$, im dritten Gliede $3 + 2 = 5$, im vierten Gliede $2 + 3 = 5$, im fünften Gliede $1 + 4 = 5$.

Man kann daher nach diesen Bemerkungen leicht die Glieder einer jeden Potenz von $a + b$ bestimmen. Man soll z. B. die Glieder von $(a+b)^7$, ohne auf die Zahlen zu sehen, die mit den einzelnen Gliedern zwischen dem ersten und letzten noch verbunden sind, formiren. Die siebente Potenz von $a + b$ muß nach Nro. 1. aus $7 + 1$ d. i. aus acht Gliedern bestehen. Man setze daher achtmahl a mit b zusammen, und zwar im ersten Gliede $a^7$ mit $b^0$, in den folgenden Gliedern vermindert man den Exponenten von a immer um 1, den Exponenten aber von b vermehrt man immer um 1, dann ist

$(a+b)^7 = a^7b^0 + a^6b^1 + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + a^1b^6 + a^0b^7.$
$= a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7.$

## Anmerkung.

Ist der eine Theil des Binomiums z. B. der zweyte Theil negativ, so bekommen alle geraden Glieder das Minuszeichen. Alles übrige bleibt. Es ist daher

$(a-b)^5$

$(a-b)^5 = a^5b^0 - a^4b^1 + a^3b^2 - a^2b^3 + a^1b^4 - a^0b^5$
$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5.$

2.

4. Es sind aber mit den Gliedern jeder Potenz zwischen dem ersten und letzten noch Zahlen als Factoren verbunden. Man nennt sie die Coefficienten der Glieder, mit welchen sie verbunden sind. Bey diesen Coefficienten bemerkt man folgendes Gesetz.

Der Coefficient des ersten Gliedes ist allemahl 1, der aber nie ausgedruckt wird.

Das zweyte Glied hat zu seinem Coefficienten den jedesmaligen höchsten Exponenten von a und b. So ist

der Coefficient des zweyten Gliedes von $(a+b)^2 = 2$
von $(a+b)^3 = 3$
von $(a+b)^5 = 5.$

Man erhält aber diesen Coefficienten, wenn man den jedesmahligen höchsten Exponenten von a durch den bedeutenden niedrigsten Exponenten von b d. i. durch 1 dividirt. So ist $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$.

Den Coefficienten des dritten Gliedes findet man, wenn man das Product aus dem jedesmahligen höchsten in den folgenden niedrigern Exponenten durch das Product aus dem Exponenten 1 in den nächstfolgenden höhern Exponenten dividirt. Daher ist der Coefficiant des dritten Gliedes

von $(a+b)^3 = \frac{3.2}{1.2} = 3.$
von $(a+b)^4 = \frac{4.3}{1.2} = 6.$
von $(a+b)^5 = \frac{5.4}{1.2} = 10.$

Der

Der Coefficient des vierten Gliedes ist gleich dem Product aus dem jedesmahligen höchsten in die beyden darauf folgenden niedrigern Exponenten, dividirt durch das Product aus 1 in die beyden nächst folgenden höhern Exponenten. Es ist daher der Coefficient des vierten Gliedes

$$\text{von } (a+b)^4 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4.$$

$$\text{von } (a+b)^5 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Man findet also die Coefficienten vom zweyten Gliede an folgendergestalt. Man multiplicire so viel Glieder, als die Zahl des Gliedes, dessen Coefficienten man sucht, Einheiten enthält weniger 1, von einer fallenden arithmetischen Reihe, deren Differenz = 1, und deren erstes Glied gleich dem jedesmahligen höchsten Exponenten der Dignität ist, in einander, und dividire das Product durchs Product einer gleichen Anzahl Glieder von einer steigenden arithmetischen Reihe, deren Differenz und erstes Glied = 1 ist, so erhält man mit dem Quotienten den gesuchten Coefficienten. Es ist also der Coefficient

| von $(a+b)^5$ | | und von $(a+b)^6$ | |
|---|---|---|---|
| fürs erste Glied allemahl = | 1 | | 1 |
| — 2te Gl. = $\frac{5}{1}$ = | 5 | $\frac{6}{1}$ = | 6 |
| — 3te Gl. = $\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$ = | 10 | $\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}$ = | 15 |
| — 4te Gl. = $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}$ = | 10 | $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$ = | 20 |
| — 5te Gl. = $\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ = | 5 | $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ = | 15 |
| — 6te Gl. = $\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ = | 1 | $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ = | 6 |
| — 7te Gl. = | | $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ = | 1 |

f. $(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

u. $(a+b)^6 = 1a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + 1a^0b^6.$

$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^3 + 6ab^5 + b^6.$

3.

5. Man bemerkt ferner, daß allemahl das erste und letzte Glied, das zweyte und vorletzte, das dritte Glied vom Anfange und das dritte Glied vom Ende und überhaupt die gleich weit von beyden Enden entfernten Glieder einerley Exponenten haben. Besteht also die Potenz aus einer geraden Anzahl Glieder, so hat man nur nöthig die Coefficienten für die erste Hälfte der Glieder zu berechnen; besteht aber die Potenz aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern, so sucht man die Coefficienten bis zum mittelsten Gliede, die übrigen Glieder bekommen die Coefficienten der ersten Glieder in umgekehrter Ordnung.

4.

6. Setzt man nun den Exponenten der Potenz des Binomiums $a + b$ allgemein $= m$, so ist nach §. 2.

der Coefficient des 2ten Gliedes $= \frac{m}{1}$

des 3ten Gl. $= \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$.

des 4ten Gl. $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

des 5. Gl. $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

des

des 6. Gl. $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$.

$$F. (a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1. \quad 2. \quad 3} a^{m-3}b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4} a^{m-4}b^4 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5} a^{m-5}b^5 + \ldots.$$

Das letzte Glied ergiebt sich von selbst, wenn man den allgemeinen Exponenten m durch eine bestimmte Zahl ausdrückt; denn wenn z. B. $m = 5$, so wird $a^{m-5}b^5 = a^{5-5}b^5 = a^0b^5 = 1b^5 = b^5$ und der Coefficient $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$ wird $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$; dies aber ist das Kennzeichen des letzten Gliedes, daß der Coefficient $= 1$ und der zweyte Theil der Wurzel oder b mit dem höchsten Exponenten 5 allein erscheint.

5.

Da sich jede Zahl in ein Binomium verwandeln läßt, so kann man vermittelst dieser Formel jede Zahl in jede Potenz erheben. Es soll z. B. 15 in die vierte Dignität erhoben werden. Man setze $15 = 10 + 5$, so ist $a = 10$, $b = 5$, und $m = 4$; Folglich

$$15^4 = (10+5)^4 = 10^4 + \frac{4}{1}10^{4-1}5 + \frac{4 \cdot 4-1}{1. \quad 2}10^{4-2}5^2 + \frac{4 \cdot 4-1 \cdot 4-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}10^{4-3}5^3 + \frac{4 \cdot 4-1 \cdot 4-2 \cdot 4-3}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}10^{4-4}5^4.$$

$$= 10^4 + 4 \cdot 10^3 5 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}10^2 5^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}10 \cdot 5^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}5^4.$$

Es ist aber $10^4 = 10000$

$4 \cdot 10^3 5 = 20000$

$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} 10^2 5^2 = 15000$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} 10 \cdot 5^3 = 5000$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 5^4 = 625$

---

F. $15^4 = (10+5)^4 = 50625$

6.

Man kann aber diese Formel noch bequemer einrichten, wenn man jedes Glied, und die Factoren, woraus es besteht, besonders betrachtet. Es ist aber in der Formel §. 4.

das 1te Glied $= a^m$

das 2te Glied $= \frac{m}{1} a^{m-1} b$; weil aber

$a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ (V. §. 61.) so ist

---

das 2te Glied $= m \cdot \frac{a^m}{a} b = m \cdot a^m \cdot \frac{b}{a}$

das 3te Glied $= \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$; weil aber

$a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ (V. §. 61.) so ist

---

das 3te Glied $= \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \frac{a^m}{a^2} b^2 = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^m}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot$

das 4te Glied $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$; und weil

$a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$; so ist

---

das vierte Glied $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{a^m}{a^3} \cdot b^3 =$

$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{a^m b^2}{a^2} \cdot \frac{b}{a}$

Folgl.

Folgl. das 5te Gl. $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \; m-3}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4} \cdot \frac{a^m b^3}{a^3} \cdot \frac{b}{a}$ u. s. w.

Man bemerkt nun hier folgendes:

das zweyte Glied ist gleich dem ersten $a^m$ in $\frac{mb}{1.a}$.

das dritte Glied gleich dem zweyten $\frac{m}{1} \cdot \frac{a^m b}{a}$ in $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{b}{a}$.

das vierte Glied gleich dem dritten $\frac{m \cdot m-1}{1. \; 2} \cdot \frac{a^m b^2}{a^2}$ in $\frac{m-2}{3} \cdot \frac{b}{a}$.

das fünfte Gl. gleich dem vierten $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1. \; 2. \; 3} \cdot \frac{a^m b^3}{a^3}$ in $\frac{m-3}{4} \cdot \frac{b}{a}$.

Ueberhaupt besteht also jedes Glied aus einem Product, dessen einer Factor allemahl das unmittelbar vorhergehende Glied ist. Setzt man daher das erste Glied $=$ A, das zweyte B u. s. w. so ist

A. B. C. D.

$(a+b)^m = a^m + A \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} + B \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b}{a} + C \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b}{a} +$

E. F. G.

$D \frac{m-3}{4} \cdot \frac{b}{a} + E \frac{m-4}{5} \cdot \frac{b}{a} + F \frac{m-5}{6} \cdot \frac{b}{a} \ldots$

Betrachtet man wieder diese Reihe, so bemerkt man, daß vom zweyten Gliede an der Quotient aus dem zweyten Theil des Binomiums dividirt durch den ersten, oder $\frac{b}{a}$ ein gemeinschaftlicher Factor ist. Setzt man nun diesen Bruch oder Quo-

tienten $\frac{b}{a} = Q$, den ersten Theil des Binomiums aber oder $a = P$, so ist

$$(a+b)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}FQ \text{ u. s. w.}$$

Wollte man daher die Zahl 15 in die vierte Potenz erheben, so dürfte man nur 15 verwandeln in $10+5$, und $10 = P$, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = Q$ und $4 = m$ setzen; dann ist

$$15^4 = (10+5)^4 = P^4 + 4AQ + \frac{4-1}{2}BQ + \frac{4-2}{3}CQ + \frac{4-3}{4}DQ + \frac{4-4}{5}EQ \text{ ꝛc.}$$

Es ist aber

| | | |
|---|---|---|
| $P^4 = 10^4 =$ | 10000 | $= A.$ |
| $4AQ = 4 . 10000 . \frac{1}{2} =$ | 20000 | $= B.$ |
| $\frac{4-1}{2}BQ = \frac{3}{2} . 20000 . \frac{1}{2} =$ | 15000 | $= C.$ |
| $\frac{4-2}{3}CQ = \frac{2}{3} . 15000 . \frac{1}{2} =$ | 5000 | $= D.$ |
| $\frac{4-3}{4}DQ = \frac{1}{4} . 5000 . \frac{1}{2} =$ | 625 | $= E.$ |
| $\frac{4-4}{5}EQ = \frac{0}{5} . 525 . \frac{1}{2} =$ | 0 | |
| Folglich $15^4 =$ | 50625. | |

Da $\frac{4-4}{5}EQ = 0$, so sieht man hieraus, daß das vorhergehende Glied $\frac{4-3}{4}DQ$ in diesem Fall das letzte seyn müsse; es ergiebt sich also, wie schon oben §. 4. angemerkt worden, das letzte Glied allemahl von selbst.

Sollte man allgemein $a^2 - x^2$ in die fünfte Dignität erheben, so ist $a^2 = P$, $\frac{-x^2}{a^2} = Q$ und $5 = m$; folglich

$(a^2 - x^2)^5$

$$(a^2 - x^2)^5 = P^5 + 5AQ + \frac{5-1}{2}BQ + \frac{5-2}{3}CQ + \frac{5-3}{4}DQ + \frac{5-4}{5}EQ.$$

Es ist aber $P^5 = a^{2 \cdot 5} = a^{10} = A.$

$$5AQ = 5 \cdot a^{10} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -5a^8x^2 = B.$$

$$\frac{5-1}{2}BQ = 2 \cdot -5a^8x^2 \cdot -\frac{x^2}{a^2} = 10a^6x^4 = C.$$

$$\frac{5-2}{3}CQ = 10a^6x^4 \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -10a^4x^6 = D.$$

$$\frac{5-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \cdot -10a^4x^6 \cdot -\frac{x^2}{a^2} = 5a^2x^8 = E.$$

$$\frac{5-4}{5}EQ = \frac{1}{5} \cdot -5a^2x^8 \cdot -\frac{x^2}{a^2} = -x^{10}.$$

F. $(a^2 - x^2)^5 = a^{10} - 5a^8x^2 + 10a^6x^4 - 10a^4x^6 + 5a^2x^8 - x^{10}.$

## 7.

Sollen Brüche in Potenzen erhoben werden, so multiplicirt man beyde Theile in sich selbst nach der Anzahl der Einheiten des Exponenten der Dignität, zu welcher der Bruch erhoben werden soll. So ist $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

$(\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$, und $(\frac{m}{n})^x = \frac{mx}{n^x}$.

## Anmerkungen.

1. Eine vermischte Größe wird vorher eingerichtet.

Z. B. $(1\frac{1}{2})^4 = \frac{3^4}{2^4} = 5\frac{1}{16}$.

2. Die Potenzen ächter Brüche sind allemahl kleiner, als die Wurzel. III. §. 66. Anmerk. 2.

## II. Vom Ausziehen der Wurzeln.

8.

Daß man jede Zahl durch die Division in zwey Factoren resolviren könne, wovon der eine der gegebene oder gewählte Divisor, der andere aber der gefundene Quotient ist, ist aus dem vorigen bekannt. III. §. 32. Eine besondere Art der Division ist nun die, vermittelst welcher man eine Größe in zwey oder mehr gleiche Factoren resolviret, das heißt, vermittelst welcher man die Wurzel findet, aus deren Multiplication in sich selbst jene Größe entstanden ist. Diese Art nun der Division, wodurch man die Wurzel von einer Größe findet, nennt man das Ausziehen der Wurzel.

So leicht nun dies ist, wenn die Zahl durch die Multiplication einer einfachen Zahl in sich-selbst entstanden ist, weil man in der Geschwindigkeit die vorhandene Zahl mit einem der Quadrate oder mit einer Cubiczahl der einfachen Zahlen vergleichen kann, so weitläuftig wird das Suchen der Wurzel bey großen Zahlen.

9.

Daß sich indessen nur aus den wenigsten Zahlen die Wurzeln im eigentlichen Verstande ziehen lassen, wird klar, wenn man, um nur bey den Quadrat- und Cubiczahlen stehen zu bleiben, die Quadrat- und Cubiczahlen der neun einfachen Zahlen formirt. Es sind nämlich:

| von der Wurzel | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die Quadrate | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| die Cubiczahlen | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

Betrachtet man diese Tabelle, so läßt sich von allen Zahlen, von 1 bis 81 die Quadratwurzel nur aus neun Zahlen ziehen, aus 72 Zahlen aber läßt sie sich nicht genau ziehen. Die Cubicwurzel aber läßt sich von allen Zahlen von 1 bis 729 auch nur aus neun Zahlen ziehen, aus 720 Zahlen aber nicht.

10.

Man nennt diejenigen Zahlen, wovon sich die Wurzel genau angeben läßt, vollkommne Dignitäten, die andern aber, und bey weiten der größte Theil, woraus sich die Wurzel nicht genau ziehen läßt, unvollkommne; die Wurzeln aber aus jenen sind Rational- aus diesen Irrationalwurzeln.

11.

Sonst pflegt man auch die Wurzel von der Anzahl der Theile zu benennen, woraus sie besteht, und dann ist sie entweder mononomisch oder binomisch oder polynomisch, je nachdem sie entweder aus einer oder zwey oder mehreren Ziffern besteht. Man kann jedoch jede Wurzel und überhaupt jede Zahl betrachten, als ob sie aus zwey Theilen zusammen gesetzt wäre, und nennt dann diese beyden Theile ein Binomium. Dergleichen Binomium stellt im allgemeinen der Ausdruck a + b vor.

12.

Wenn man bloß anzeigen will, daß die Wurzel aus einer Zahl oder Größe gezogen werden soll, so pflegt man dies Zeichen √ davor zu setzen. Und soll nicht bloß die Quadratwurzel, sondern die Wurzel einer höhern Ordnung ausgezogen werden, so setzt man noch den Exponenten in die Oeffnung.

So bedeutet $\sqrt{a}$, daß die Quadratwurzel; $\sqrt[3]{a}$, daß die Cubicwurzel; $\sqrt[m]{a}$, daß die mfache Wurzel aus a gezogen werden soll.

## A.

## Das Ausziehen der Quadratwurzel.

### 13.

Um zu erfahren, auf welche Art man bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl verfahren müsse, darf man nur den allgemeinen Ausdruck für ein Binomium ins Quadrat erheben, und bemerken, aus was für Theilen dasselbe bestehe, sucht dann wieder aus diesen Theilen den Quotienten, so erhält man wieder die Wurzel. Man multiplicire also das Binomium $a + b$ in sich selbst.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2. \end{array}$$

Dieser Ausdruck stellt nun zwar zunächst nur das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel vor, man wird aber in der Folge sehen, daß man sich ebenfalls das Quadrat einer jeden polynomischen Wurzel darunter vorstellen kann. Wenn nun insbesondere a den ersten und b den zweyten Theil des Binomiums bedeutet, so besteht das Quadrat eines Binomiums aus der Summe dreyer Glieder, nämlich 1) aus dem Quadrat des ersten Theils $= a^2$; 2) aus dem doppelten Product des ersten Theils in den zweyten $= 2ab$; 3) aus dem Quadrat des zweyten Theils $= b^2$.

14.

Will man nun wieder die Wurzel aus diesem Quadrat ziehen, so kann man dabey folgendergestalt verfahren.

$$\begin{array}{l|l} a^2 + 2ab + b^2 & a + b \\ a^2 & \\ \hline 2ab + b^2 & \\ (2a + b) & \\ 2ab + b^2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Daß der erste Theil der hier schon bekannten Wurzel in dem ersten Gliede des Quadrats des ganzen Binomiums enthalten sey, sieht man sogleich, weil dies Glied das Quadrat des ersten Theils selbst ist. Man dividire also durch diesen hier schon bekannten ersten Theil a in das erste Glied $a^2$, so ist der Quotient und zugleich der erste Theil der Wurzel $= a$. Das Product aus diesen ersten Theil a in den Divisor $a = a^2$ ziehe man vom ersten Gliede des Quadrats des Binomiums ab, so bleibt noch übrig $2ab + b^2$.

Da das Glied 2ab des gebliebenen Rests ein Product ist aus dem schon gefundenen doppelten ersten Theil der Wurzel (2a) in den noch zu suchenden zweyten Theil der Wurzel, so darf man nur, um diesen zweyten Theil aus 2ab zu finden, 2ab durch 2a dividiren. Man setze also 2a unter 2ab und dividire, so ist der Quotient und zugleich der zweyte Theil der Wurzel b gefunden. Man setze b in den Quotienten neben a mit dem Zeichen Plus,

desgleichen neben den Divisor 2a, und multiplicire nun (2a + b) in den gefundenen zweyten Theil der Wurzel b, so bekommt man die beyden Producte $2ab + b^2$. Zieht man nun diese beyden Producte ab von dem gebliebenen Rest $2ab + b^2$, so bleibt nichts übrig, und kann auch nichts übrig bleiben, weil $a^2 + 2ab + b^2$ ein vollkommnes Quadrat war von a + b, und weil man nach und nach alle Partialproducte, woraus das ganze Quadrat bestand, davon abgezogen hat.

15.

Da das Quadrat einer einfachen Zahl höchstens nur aus zwey Ziffern bestehen kann, so theilt man aus diesem Grunde die gegebene Quadratzahl eines Binomiums in Klassen von zwey Ziffern, und davon enthält

die letzte Klasse rechter Hand die Producte aus den Einern, nämlich

1. Das Product der Einer in sich selbst
2. die Zehner von dem Producte aus den Einern in die Zehner und von dem Producte aus den Zehnern in die Einer.

Die erste Klasse aber linker Hand enthält

1. das übrige von den Producten aus den Einern in die Zehner und aus den Zehnern in die Einer, nämlich die Hunderte, die in diesen beyden Producten enthalten sind. Es sind aber nicht allemahl Hunderte darin enthalten.
2. Das Product der Zehner in sich selbst.

16.

Weil das Quadrat der Zahlen unter 32 höchstens nur aus drey Ziffern besteht, so darf die erste

Klasse

Klasse linker Hand nicht nothwendig allemahl zwey Ziffern enthalten; für diese Klasse braucht daher auch nur eine Ziffer übrig zu bleiben.

Man nehme z. B. die beiden Zahlen $31 = 30 + 1$ und $98 = 90 + 8$.

| a + b | a + b |
|---|---|
| 30 + 1 | 90 + 8 |
| 30 + 1 | 90 + 8 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | = 1. 1. | | 64 | = 8. 8 = $b^2$ |
| | 30 | = 1. 30. | 7 | 20 | = 8. 90 = b. a |
| | 30 | = 30. 1. | 7 | 20 | = 90. 8 = a. b |
| 9 | 00 | = 30. 30. | 81 | 00 | = 90. 90 = $a^2$ |
| 961 | | | 96 | 04 | $= a^2 + b. a + a. b + b^2$ |
| | | | | | $= a^2 + 2ab + b^2$ |

Es findet sich also

1. das Quadrat der Zehner — wenn man die Nullen abrechnet — ganz in der ersten Klasse linker Hand.
2. Das Quadrat aber der Einer ganz in der letzten Klasse.
3. Vom Product der Einer in die Zehner und der Zehner in die Einer findet man die Zehner in der ersten Ziffer der letzten Klasse, die Hunderte aber — wenn dergleichen darin enthalten sind — in der letzten Ziffer der ersten Klasse.

## 17.

Nach dem Schema §. 14. und den Bemerkungen §. 15. 16. würde man also bei Ausziehung der Wurzel aus einer höchstens aus vier Ziffern bestehenden Zahl folgendergestalt verfahren müssen.

Man soll z. B. die Wurzel ziehen aus 9604.

$a^2 + 2ab + b^2 = 9604|98$
$a^2 = 81|::a+b$

Rest. $2ab + b^2 = 1504$
$2a + b = (188)$ hievon ist 18 oder eigentlich
$(2a+b)b = 1504$ $180 = 2a$, $8 = b$.

0

1. Man theilt die gegebene Zahl von der rechten Hand gegen die linke in Klassen von zwey Ziffern. Ist die Anzahl der Ziffern ungerade, so bleibt für die erste Klasse linker Hand nur eine Ziffer, und das ist ein Zeichen, daß der erste Theil der Wurzel eine Zahl sey, deren Quadrat auch nur aus einer einfachen Zahl besteht.

2. In der ersten Klasse linker Hand befindet sich, wo nicht mehr, doch wenigstens das Quadrat der Zehner oder das Quadrat des ersten Theils der Wurzel. §. 16.
   a. Enthält diese Klasse weiter nichts, als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel, so muß die Zahl dieser Klasse ein Product einer der einfachen Zahlen in sich selbst seyn.
   b. Enthält sie aber noch etwas von dem doppelten Product des ersten Theils in dem zweiten, so nimmt man das nächst kleinere Quadrat von einer der einfachen Zahlen.

Man setze also entweder das Quadrat selbst, wenn der erste Fall, oder das nächst kleinere Quadrat (hier 81), wenn der zweite Fall Statt findet, unter die Zahl der ersten Klasse und ziehe es davon ab. Die Wurzel aber dieses Quadrats (hier 9) setze man besonders, etwa in die Stelle des Quotienten.

Dies

Dies ist dann der erste Theil der Wurzel oder a, der die Zehner enthält.

3. An den etwa gebliebenen Rest — hier 15 — von der ersten Klasse setze man die folgende Klasse — hier 04, daß also der ganze Rest von der gegebenen Zahl noch 1504 ist, in welchem nun noch die beiden Partialproducte $2ab + b^2$ enthalten sind — und dividire die erste Klasse — hier 0 — nebst dem Rest von der vorigen Klasse — hier 15, also zusammen 150 — durch den doppelten gefundenen ersten Theil der Wurzel — hier 2. 9 = 18 —. Mit dem Quotienten — hier 8 — erhält man den zweiten Theil der Wurzel oder b, der die Einer enthält. Man setze ihn also neben den ersten Theil.

4. Eben diesen gefundenen zweiten Theil der Wurzel — hier 8 — setze man auch neben den Divisor — hier 18, daß also der doppelte erste Theil und der zweite Theil in eine Reihe zu stehen kommen — und schließe nun die ganze Zahl — hier 188 — in Klammern ein. Dann multiplicire man die ganze eingeschlossene Zahl in den letzt gefundenen zweiten Theil der Wurzel, so erhält man mit dem Producte

a. das Quadrat des zweiten Theils der Wurzel — hier 8. 8 = 64.

b. Das doppelte Product aus dem ersten Theil der Wurzel in den zweiten — hier 8. 18 oder eigentlich 8. 180 = 1440 und mit den vorigen zusammen 1504.

Endlich ziehe man dies Product von dem Rest der gegebenen Quadratzahl ab, so muß, wenn man anders den zweiten Theil der Wurzel richtig gefunden

funden hat, und wenn die Zahl ein vollkommenes Quadrat gewesen, nichts übrig bleiben.

18.

Das Quadrat einer mononomischen Wurzel besteht höchstens aus zwei, einer binomischen höchstens aus vier, und einer polynomischen Wurzel höchstens aus doppelt so viel Ziffern, als die Wurzel hat. Wollte man nun aus einer wenigstens aus fünf und höchstens aus sechs Ziffern bestehenden Zahl die Wurzel ziehen, so würde diese aus drei Theilen bestehen, und man dürfte sich nur wieder ein allgemeines Schema für ein Quadrat einer trinomischen Wurzel anfertigen, um die Regeln zu Findung der einzelnen Theile der Wurzel zu erforschen. Es bestehe also die Wurzel aus der Summe der drei Theile $a + b + c$.

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline a^2+ab+ac \\ \quad ab+b^2+bc \\ \quad\quad ac+bc+c^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2, \text{ es ist aber} \\ 2ac+2bc = 2c(a+b) \\ \hline \end{array}$$

Folgl. $(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2c(a+b)+c^2$.

Das Quadrat einer trinomischen Wurzel besteht also aus der Summe folgender fünf Glieder.

1. Aus dem Quadrat des ersten Theils oder $a^2$.
2. Aus dem doppelten Product des ersten Theils in den zweiten oder $2ab$.
3. Aus dem Quadrat des zweiten Theils oder $b^2$.
4. Aus dem doppelten Product des ersten und zweiten Theils in den dritten oder $2c(a+b)$.

5. Aus

5. Aus dem Quadrat des dritten Theils oder $c^2$.

Vermittelst dieser Formel läßt sich denn auch wirklich die Wurzel aus einer Zahl die aus fünf oder sechs Ziefern besteht, z B. aus der Zahl 54756 ziehen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 5 | 47 | 56 | 2 3 4 |
| $a^2$ | = | 4 | | | a+b+c |
| $2ab+b^2+2c(a+b)+c^2$ | = | 1 | 47 | 56 | |
| $2a+b$ | = | | 43 | : : | |
| $(2a+b)b$ | = | 1 | 29 | : : | |
| $2c(a+b)+c^2$ | = | | 18 | 56 | |
| $2(a+b)+c$ | = | | 4 | 64 | |
| $(2(a+b)+c)c$ | = | | 18 | 56 | |
| | | | 0 | | |

19.

Allein man braucht im Grunde keine besondere Regeln zu Ausziehung polynomischer Wurzeln, da sie auf eben die Art, wie die binomische Wurzel, gefunden werden können, daher denn die §. 17. gegebenen Regeln als allgemeine Regeln zu betrachten sind. Indessen kann die Vorstellung §. 18. dazu dienen, sich einen deutlichern Begriff von der ganzen Verfahrungsart zu machen.

Es beruht aber diese Methode, wie sie in den mathematischen Lehrbüchern vorgetragen wird, auf folgende Vorstellung.

Jede aus mehr als zwei Ziefern bestehende Zahl kann doch als nur aus zwei Theilen bestehend betrachtet werden, wenn man nemlich die Einer als den zweiten, die übrigen Ziefern aber, nemlich die Hunderte, Tausende ꝛc. zusammen als den ersten

Theil ansieht. Nach dieser Vorstellung wäre also von der Zahl 3246 der erste Theil 324, und der zweite Theil 6, eigentlich 3240 + 6.

Soll nun aus einer aus mehr als vier Ziefern bestehenden Zahl die Wurzel gezogen werden, so theile man sie nach §. 17. 1. in Klassen von zwey Ziefern ab; dann suche man den ersten Theil der Wurzel nach Nr. 2., den zweyten nach Nr. 3 u. 4.

Betrachtet man dann die beiden gefundenen ersten Theile oder a + b nur als einen Theil, und zwar als den ersten, und dividirt die erste Zifer der folgenden Klasse nebst dem, was von der vorigen Klasse etwa noch übrig geblieben ist, durch den nunmehrigen doppelten ersten Theil — der also aus a + b besteht — so findet man den zweiten Theil, oder eigentlich den dritten, mit welchem man dann wieder nach Nr. 3 und 4 verfährt.

Ist außerdem noch eine Klasse von Zahlen vorhanden, so betrachtet man wieder die schon gefundenen drei Theile der Wurzel als a oder als den ersten Theil, und applicirt von neuen die Regeln Nr. 2, 3 und 4, wodurch man den neuen zweiten oder eigentlich den vierten Theil der Wurzel erhält.

Ueberhaupt wiederholt man die Anwendung der drei letzten Regeln so oft, als die Zahl Klassen außer der ersten enthält, nur daß man immer die bereits gefundenen Theile der Wurzel als den ersten Theil derselben betrachtet. Folgende Beispiele werden die ganze Methode erläutern.

1. Man soll die Wurzel aus 186624 ziehen.

1 8,6 6,2 4| 4 3 2
$a^2$ = 1 6 : : : : a†b :
2,6 6 : : a†b
2a†b = (8 3): :
(2a†b)b = 2 4 9 : :
1 7,2 4
2a†b = (8 6 2)
(2a†b)b 1 7 2 4
0

2. Es soll die Wurzel aus der Zahl 6826725376 gezogen werden.

6 8,2 6,7 2,5 3,7 6|8 2 6 2 4
$a^2$ = 6 4 : : : : : : : : a†b : : :
4,2 6 : : : : : a†b : :
2a†b = (1 6 2): : : : : a†b :
(2a†b)b = 3 2 4 : : : : : a†b
a†b
1,0 2,7 2 : : : :
2a†b = (1 6 4 6): : : :
(2a†b)b = 9 8 7 6 : : : :
3,9 6,5 3 : :
2a†b = (1 6 5 2 2): :
(2a†b)b = 3 3 0 4 4 : :
6 6,0 9,7 6
2a†b = (1 6 5 2 4 4)
(2a†b)b = 6 6 0 9 7 6
0

20.

Jede ganze Zahl läßt sich in einen unächten Bruch verwandeln, wenn man ihr 1 oder eine jede

andere Zahl zum Nenner giebt, und die Zahl selbst in diesem Nenner multiplicirt. Hat man nun eine unvollkommene Quadratzahl, so läßt sich zwar die Wurzel nicht genau ausziehen, man kann sich aber derselben so nähern, daß das, was noch daran fehlt, wenn man will, ganz unbedeutend wird. Dies geschiehet, indem man die Zahl nach und nach in 100tel, 10000tel, 1000000tel u. s. w. verwandelt. Will man z. B. die Zahl 8 in 100tel verwandeln, so wird $8 = \frac{800}{100}$ oder 8,00; in 10000tel verwandelt wird $8 = \frac{80000}{10000} = 8{,}0000$ u. s. w. Da nun die Wurzel aus einer Potenz von 100 allemal gleich der ebensovielsten Potenz von 10, so erhält man außer den Ziefern, die die ganzen Theile der Wurzel ausdrücken, allemal noch halb so viel Decimalstellen, als man Nullen an die ganze Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, gesetzt hatte. Will man daher die Wurzel in einer gewissen Anzahl Decimalstellen ausdrücken, so darf man nur an die Zahl selbst, woraus die Wurzel durch Näherung gezogen werden soll, doppelt so viel Nullen anhängen, als man Decimalstellen in der Wurzel verlangt.

Soll man z. B die Wurzel aus der Zahl 8 ziehen, so fällt die Wurzel — da 8 kein vollkommenes Quadrat ist — zwischen 2 und 3. Sie ist nemlich größer als 2 und kleiner als 3. Eine Zahl aber, die größer ist als 2 und kleiner als 3, ist die kleinere Zahl 2 mit einem Bruch. Diesen Bruch nun kann man nach Gefallen durch mehrere Decimalstellen ausdrücken. Soll er z. B. durch zwey Decimalstellen ausgedruckt werden, so verwandele man die Zahl 8 in 10000tel, das heißt, man hänge daran zweymal zwey d. i. vier Nullen, dadurch wird 8 in $\frac{80000}{10000}$

$\frac{8}{100}\frac{0}{0}\frac{0}{0} = 8,0000$ verwandelt. Man vergesse aber nicht hinter den ganzen Wurzeltheil 2 ein Komma zu machen.

8,00,00|2,82 . . . .

$a^2 = 4 : : : :$ | $\underbrace{a+b} :$

$4,00 : : \quad a+b$

$2a+b = (48) : :$

$(2a+b)b = 384 : :$

16,00

$2a+b = (562)$

$(2a+b)b = 1124$

476

Die Wurzel ist also 2 ganze und $\frac{82}{100}$ oder $\frac{2}{1}\frac{8}{0}\frac{2}{0} = 2,82$. Es ist aber dies die Wurzel noch nicht genau, und kann auch nicht ganz genau gefunden werden, weil immer etwas übrig bleiben wird. Sollte einmal nichts übrig bleiben, so müsste der Bruch ein Ganzes machen, dies kann aber nicht seyn, weil sonst die Zahl ein vollkommenes Quadrat hätte seyn müssen. Wäre sie aber ein vollkommenes Quadrat gewesen, so hätte man die Wurzel gleich um Eins vermehren können. Hätte man aber an den gebliebenen Rest 476 noch zwey Nullen gesetzt, so hätte man die Wurzel noch in einer Decimalstelle mehr, und eben dadurch noch genauer gefunden, oder man hätte sich der wahren Wurzel noch mehr genähert.

21.

Soll die Wurzel aus einer mit einem Decimalbruch schon verbundenen Zahl gezogen werden, so theilt man die Ziefern der ganzen Zahl, wenn sie nämlich aus mehr als zwei Ziefern besteht, wie ge-

wöhnlich von der rechten Hand gegen die linke; die Ziefern der Decimalstellen aber von der linken Hand gegen die rechte in zweyziefrige Klassen, und wenn die Anzahl der Ziefern des Decimalbruchs ungerade ist, so hängt man, um die letzte Klasse rechter Hand vollzählig zu machen, noch eine Null an. Hat man dann die Wurzel aus den Ziefern der ganzen Zahl gefunden, so mache man ein Komma dahinter, und verfahre mit dem etwa gebliebenen Rest und den übrigen Decimalbrüchen als mit ganzen Zahlen.

1. Soll z. B. aus 263,737 die Wurzel gezogen werden, so muß man gleich noch eine Null anhängen, dann machen 7370 zwei volle Klassen aus.

$$
\begin{array}{rl}
 & 2\,|\,6\,3{,}7\,3\,|\,7\,0 \;\|\; 1\,6{,}2\,3\ldots\ldots \\
a^2 = & 1\,|\,:\,:\,:\,:\,|\,:\,: \;\|\; \underbrace{a+b}\,:\,: \\
\hline
 & 1\,6\,3\,:\,:\,:\,: \quad \underbrace{a+b}\,: \\
2a+b = & (2\,6)\,:\,:\,:\,: \quad a+b \\
(2a+b)b = & 1\,5\,6\,:\,:\,:\,: \\
\hline
 & 7\,7\,3\,:\,: \\
(2a+b) = & (3\,2\,2)\,:\,: \\
(2a+b)b = & 6\,4\,4\,:\,: \\
\hline
 & 1\,2\,9\,7\,0 \\
(2a+b) = & (3\,2\,4\,3) \\
(2a+b)b = & 9\,7\,2\,9 \\
\hline
 & 3\,2\,4\,1
\end{array}
$$

Man könnte auch hier an den gebliebenen Rest 3241 noch zwei oder vier ꝛc. Nullen hängen, dann fände man die Wurzel in einer oder zwey Decimalstellen mehr.

2. Man

2. Man soll die Wurzel aus 146,8944 ziehen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 46,89 | 44 | 12,12 |
| $a^2 =$ | 1 | : : : : | : : | a+b : : |
| | | 46 : : : | | a+b : |
| $2a+b =$ | | (22) : : : | | a+b |
| $(2a+b)b =$ | | 44 : : : | | |
| | | 289 : : | | |
| $(2a+b) = (2a+b)b =$ | | 241 : : | | |
| | | 4844 | | |
| $(2a+b) =$ | | (2422) | | |
| $(2a+b)b =$ | | 4844 | | |
| | | 0 | | |

22.

Eben so verhält sichs, wenn die Wurzel aus einem bloßen Decimalbruch gezogen werden soll. Da die Wurzel aus einem Bruch keine Ganzen enthalten kann, so deutet man deren Mangel auf gewöhnliche Art durch Null mit einem dahinter gesetzten Comma an. So findet man z. B. die Wurzel aus 0,000144 folgendergestalt.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0,00 | 01 | 44 | 0,012. |
| $a^2 =$ | | 1 | | a+b |
| | | 44 | | |
| $2a+b =$ | | (22) | | |
| $(2a+b)b =$ | | 44 | | |
| | | 0 | | |

23.

Soll die Wurzel aus einem gemeinen Bruch gezogen werden, so betrifft dies entweder

1. beide Theile des Bruchs, welches man so ausdrückt, daß man das Wurzelzeichen vor den ganzen Bruch setzt. Z. B. $\sqrt{\frac{9}{16}}$.

In diesem Fall nimmt man jeden Theil besonders und zieht die Wurzel aus. Oder man kann auch vorher den Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, und aus dem erhaltenen Decimalbruch die Wurzel ziehen. So ist z. B.

$$\sqrt{\tfrac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \tfrac{3}{4}.$$

Oder weil $\frac{9}{16} = 0{,}5625$ ist
so ist $\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{0{,}5625}$.

$$\sqrt{0{,}5625} = 0{,}75$$

F. $\sqrt{\frac{9}{16}} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Anmerkung.

Dies letzte Verfahren ist besonders in dem Fall vortheilhaft, wenn sich die Wurzel aus einem oder aus beiden Theilen des gemeinen Bruchs nicht ziehen läßt.

2. Oder es soll die Wurzel nur aus einem von beiden Theilen des Bruchs gezogen werden.

So ist z. B. $\frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{3}{5}$ und $\frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$.

24.

Ob in allen diesen Fällen die gefundene Zahl wirklich die Wurzel sey, davon kann man sich überzeugen, wenn die Multiplication derselben in sich selbst die Zahl wieder giebt, aus der man die Wurzel gezogen, wobey noch zu merken, daß der etwa gebliebene Rest noch zum Producte addirt werden müsse, so wie bey der Divisionsprobe.

25.

Das Quadrat einer Größe kann nie anders, als positiv seyn, denn es ist so wohl $+4^2$, als auch $-4^2 = +16$; daher läßt sich die Quadratwurzel

aus

aus keiner negativen Größe ziehen. Die Wurzel selbst aber, und das folgt unmittelbar selbst daraus, kann so wohl negativ als positiv seyn. Denn $\sqrt{25} = +5$ und auch $-5$. $\sqrt{m^2} = +m$ und $-m$. Man muß daher die jedesmaligen Umstände und Bedingungen in Erwägung ziehen, wenn man wissen will, welche Bedeutung Statt finden könne.

## B.

## Das Ausziehen der Cubicwurzel.

### 26.

Eine Cubiczahl oder der Cubus einer Zahl ist ein Product aus ihrem Quadrat in die Wurzel. Die Cubiczahlen der einfachen Zahlen findet man in der Potenztafel §. 9. aus deren Betrachtung man zugleich erkennet, daß der Cubus, selbst der höchsten einfachen Zahl nur aus drey Ziefern bestehe, und auch nur bestehen könne. Denn wenn der Cubus einer einfachen Zahl ein Product ist aus dieser Zahl in ihr Quadrat, das Quadrat aber einer einfachen Zahl höchstens nur Zehner enthalten könne, so kann ja das Product aus Zehnern in Einer höchstens nur Hunderte enthalten.

### 27.

Die Wurzeln der neun niedrigsten vollkommenen Cubiczahlen findet man in jener Potenztafel §. 9., wenn man sich dieselben noch nicht so geläufig gemacht hat, daß sie einem im vorkommenden Fall sogleich beyfallen. Mit dem Ausziehen aber zusammengesetzter oder polynomischer Cubicwurzeln kann man nicht so leicht fertig werden. Man entdeckt aber die Regel, wornach man sich dabey zu richten hat, wenn man den Cubus einer binomischen Wur-

zel formirt und bemerkt, aus was für Theilen derselbe bestehet. Man multiplicire daher $(a + b)^2$ in $a + b$.

Es war aber $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ §. 13.

$$\begin{array}{r} a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline \end{array}$$

Folglich $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Es besteht also der Cubus eines Binomiums aus der Summe folgender vier Glieder, nämlich

1. Aus dem Cubus des ersten Theils der Wurzel oder $a^3$.
2. Aus dem dreyfachen Product des Quadrats des ersten Theils in den zweyten oder $3a^2b$.
3. Aus dem dreyfachen Product des ersten Theils ins Quadrat des zweyten Theils der $3ab^2$.
4. Aus dem Cubus des zweyten Theils oder $b^3$.

## 28.

Bedeutet a die Zehner und b die Einer im Binomium, so enthält

1. Der Cubus von den Zehnern oder $a^3$ die Tausende und derer können höchstens nur 729 seyn, daher sich die Ziffern von $a^3$ wenigstens bis in die vierte und höchstens bis in die sechste Stelle von der rechten Hand an gezählt erstrecken. Wenn daher $a = 10$, so ist $a^3 = 10^3 = 1000$; wenn $a = 90$, so ist $a^3 = 90^3 = 729000$.
2. Das Factum intermedium $3a^2b$ enthält Hunderte, und deren können wenigstens drey, höchstens aber nur 2187 seyn; denn wenn $a + b = 11 = 10 + 1$, so ist $3a^2b = 3.10^2.1 = 3.100 = 300$. Wenn

$a + b = 99 = 90 + 9$, so ist $3a^2b = 3.90^2.9 = 3.8100.9 = 218700$.

3. Das Factum intermedium $3ab^2$ enthält Zehner, und deren können wenigstens drey und höchstens 2187 seyn; denn wenn
$a + b = 11 = 10 + 1$, so ist $3ab^2 = 3.10.1^2 = 30$.
$a + b = 99 = 90 + 9$, so ist $3ab^2 = 3.90.9^2 = 3.90.81 = 21870$.

4. Der Cubus von den Einern oder $b^3$ enthält wenigstens einen Einer, höchstens aber nur 729; denn wenn
$b = 1$, so ist $b^3 = 1^3 = 1$; wenn $b = 9$, so ist $b^3 = 9^3 = 729$.

| Oder wenn $a + b = 11 = 10 + 1$ | | | | Od. wenn $a + b = 99 = 90 + 9$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $10 + 1$ | | | | $90 + 9$ | |
| | | $10 + 1$ | | | | $810 + 81$ | |
| | $100 + 10$ | | | | $8100 + 810$ | | |
| | $100 + 20 + 1$ | | | | $8100 + 1620 + 81$ | | |
| | | $10 + 1$ | | | | $90 + 9$ | |
| | $100 + 20 + 1$ | | | | $72900 + 14580 + 729$ | | |
| $1000 + 200 + 10$ | | | | $729000 + 145800 + 7290$ | | | |
| so ist d. Cubus $1000 + 300 + 30 + 1$ | | | | $729000 + 218700 + 21870 + 729$ | | | |

| | wenigstens | | höchstens |
|---|---|---|---|
| Es bedeutet also $a^3$ | 1 | Tausend — | 729 Tausende |
| $3a^2b$ — | 3 | Hunderte — | 2187 Hunderte |
| $3ab^2$ — | 3 | Zehner — | 2187 Zehner |
| $b^3$ — | 1 | Einer — | 729 Einer |

Folglich ist $11^3 = 1331$. und $970299 = 99^3$.

29.

Der Cubus einer einfachen Zahl bestand höchstens aus drey Ziefern §. 26., der Cubus einer zweytheiligen Wurzel wenigstens aus vier höchstens aus sechs Ziefern §. 28. Man kann also schließen, daß der Cubus einer jeden polynomischen Wurzel überhaupt

haupt höchstens dreymahl so viel Ziefern enthalten werde, als die Wurzel. Umgekehrt kann man nun auch aus der Anzahl der Ziefern einer Cubiczahl auf die Anzahl der Theile ihrer Wurzel den Schluß machen. Besteht die Cubiczahl aus einer, zwey oder höchstens aus drey Ziefern, so ist ihre Wurzel eine einfache Zahl; besteht sie aus vier bis sechs Ziffern, so besteht ihre Wurzel aus zwey Ziefern; besteht die Cubiczahl aus sieben bis neun Ziefern, so enthält die Wurzel drey Ziefern 2c.

30.

Sucht man nun aus der allgemeinen Formel für den Cubus von $a+b$ §. 27. die Theile der Wurzel wieder, und bemerkt dabey das Verfahren, wie jeder Theil insbesondere gefunden wird, so lassen sich durch ein gleiches Verfahren aus jeder Cubiczahl, die aus vier bis sechs Ziefern besteht, die Wurzeltheile finden.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a + b$$

$a^3$

---

$3a^2$ :) Rest. $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3$

---

o

Der höchste Theil der Wurzel oder a steckt offenbar in $a^3$; man setze also diesen Wurzeltheil a in die Stelle des Quotienten, ihren Cubus $a^3$ aber ziehe man von der ganzen Cubicgröße ab, so bleibt übrig $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Um nun auch den zweyten Theil oder b zu finden, nehme man dasjenige Partialproduct von dem gebliebenen Rest, worin sich b als Factor findet, dies ist $3a^2b$. Man erhält aber b aus $3a^2b$, wenn man

$3a^2b$

$3a^2b$ durch $3a^2$ dividirt. Zu dem Ende nehme man das Quadrat von dem gefundenen ersten Theil a dreymahl $= 3a^2$, und dividire wirklich $3a^2b$ durch $3a^2$, so findet man mit dem Quotienten zugleich den zweyten Theil der Wurzel.

Sind nun $a + b$ wirklich die beyden Theile der Wurzel, so muß auch die Summe

1. aus dem Product von $3a^2$ in $b = 3a^2b$, und
2. dem Product aus dem dreyfachen Quadrat des zweyten Theils in den ersten oder $3ab^2$, und
3. dem Cubus des zweyten Theils oder $b^3$ genau so groß seyn, als der gebliebene Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Und so verhält sichs auch wirklich. Wenn man daher die Summe jener drey Producte von dem gebliebenen Rest abzieht, so darf nichts übrig bleiben.

## 31.

Auf eben die Art findet man nun auch aus einer Cubiczahl, die wenigstens aus vier, höchstens nur aus sechs Ziefern besteht, die beyden Wurzeltheile. Die Cubiczahl sey z. B. 91125.

Das erste, was man zu thun hat, ist: Man theilt die Zahl in Classen von drey Ziffern von der rechten Hand gegen die linke zu. Besteht die Zahl aus sechs, neun, zwölf ꝛc. Ziffern, so bekommt jede Classe drey, besteht sie aber nur aus vier oder fünf, sieben oder acht, zehen oder eilf ꝛc. Ziefern, so bleiben für die erste Klasse linker Hand nur zwey oder gar nur eine Ziffer.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 91 | 125 | 45 |
| $a^3 =$ | 64 | ::: | atb |
| | 27 | 125 | |
| Divisor ist $3a^2 =$ | (4 | 8) | |
| $3a^2b =$ | 24 | 0 | |
| $3ab^2 =$ | 3 | 00 | |
| $b^3 =$ | | 125 | |
| $3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ | 27 | 125 | v. obern Rest abgezogen |
| bleibt | 0, | daher 45 die wahre Wurzel. | |

1. Um den ersten Theil der Wurzel zu finden, vergleiche man die Zahl in der ersten Classe linker Hand — hier 91 — mit einer der Cubiczahlen in der Potenztafel §. 9. Ist nun die Zahl selbst darunter befindlich, so ist die in der Wurzelreihe darüber stehende Zahl der erste Theil der Wurzel. Findet man sie aber nicht selbst unter diesen Cubiczahlen, so nehme man die nächst kleinere Cubiczahl — hier 64 — und setze sie unter die erste Classe, ihre Wurzel aber in die Stelle des Quotienten, so hat man den ersten Theil der Wurzel — hier 4. —

   Dann ziehe man den Cubus — hier 64 — ab von der Zahl in der ersten Classe, und setze zum Rest die folgende Classe. Hier ist der Rest 27, daran 125 gesetzt, ist zusammen 27125. —

2. Um nun aber auch den zweyten Theil der Wurzel zu finden, nehme man das dreyfache Quadrat des ersten Theils — hier $3 . 4^2 = 3 . 16 = 48$ — und setze dies Product als Divisor unter den gebliebenen Rest so, daß die niedrigste Ziefer desselben unter der höchsten Ziefer der folgenden Classe zu stehen kommt, — hier 8 unter 1. —

   Durch dieses dreyfache Quadrat des ersten Theils — also hier durch 48 — dividire man den geblie-

gebliebenen Rest — also hier 27 1 durch 48 — doch muß man ja den Quotienten nicht zu groß nehmen, weil von dem gebliebenen ganzen Rest außer dem dreyfachen Quadrat des ersten Theils in den zweyten auch noch das dreyfache Quadrat des zweyten Theils in den ersten und der Cubus des zweyten Theils abgezogen werden muß.

Den gefundenen Quotienten — hier 5 — setze man als den zweyten Theil der Wurzel neben den ersten Theil, und multiplicire nun das dreyfache Quadrat des ersten Theils in den eben gefundenen zweyten Theil, — hier 48 in $5 = 240$ — das Product setze man gerade unter den Divisor — hier 0 unter 8. —

Ferner multiplicire man das Quadrat des zweyten Theils in den dreyfachen ersten Theil — $3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 300$ — und setze das Product so unter, daß man die niedrigste Ziefer um eine Stelle vorrückt — hier 0 unter 2. —

Endlich nehme man den Cubus des zweyten Theils — hier $5^3 = 125$ — und setze dessen niedrigste Ziefer unter die niedrigste Ziefer des gebliebenen Rests — hier 5 unter 5. —

3. Dann addire man die drey Partialproducte, nämlich $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — hier 240 . . + 300 . + 125 = 27125 — und ziehe ihre Summe ab von dem oben gebliebenen Rest. Ist die Zahl eine vollkommne Cubiczahl gewesen, so darf nach Abziehung der Summe dieser drey Partialproducte von dem gebliebenen Rest nichts übrig bleiben.

32.

Diese Regeln dienen nun zwar zunächst nur zu Ausziehung binomischer Wurzeln, man kann sie aber auch bey Cubiczahlen polynomischer Wurzeln an-

anwenden, weil hier eben das gilt, was oben §. 19. bei Ausziehung polynomischer Quadratwurzeln erinnert worden ist. Man sucht nemlich nach den Regeln §. 31. den ersten und zweyten Theil, und betrachtet dann beide als den ersten Theil und sucht nach Nro. 2. den dritten Theil. Hat man diesen gefunden, so betrachtet man die bereits gefundenen drey Theile wieder als den ersten, und sucht den vierten u. s. w. Ein Exempel wird die Sache deutlicher machen. Man soll z. B. die Cubicwurzel aus der Zahl 564379103744 ziehen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 564 | 379 | 103 | 744 | 8264 |
| $a^3 =$ | 512 | ::: | ::: | ::: | a+b :: |
| | 52 | 379 | ::: | ::: | a+b : |
| $3a^2 = 3 \cdot 8^2 =$ | (192) | ::: | ::: | ::: | a+b. |
| $3a^2b = 192 \cdot 2 =$ | 384 | ::: | ::: | | |
| $3ab^2 = 3 \cdot 8 \cdot 2^2 =$ | | 96 | ::: | ::: | |
| $b^3 = 2^3 =$ | | 8 | ::: | ::: | |
| | 39 | 368 | ::: | ::: | |
| | 13 | 011 | 103 | ::: | |
| $3a^2 = 3 \cdot 82^2 =$ | (2 | 017 | 2) | ::: | |
| $3a^2b = 20172 \cdot 6 =$ | 12 | 103 | 2 | ::: | |
| $3ab^2 = 3 \cdot 82 \cdot 6^2 =$ | | 88 | 56 | ::: | |
| $b^3 = 6^3 =$ | | | 216 | ::: | |
| | 12 | 191 | 976 | ::: | |
| | | 819 | 127 | 744 | |
| $3a^2 = 3 \cdot 826^2 =$ | (204 | 682 | 8) | | |
| $3a^2b = 2046828 \cdot 4 =$ | 818 | 731 | 2 | | |
| $3ab^2 = 3 \cdot 826 \cdot 4^2 =$ | | 396 | 48 | | |
| $b^3 = 4^3 =$ | | | 64 | | |
| | 819 | 127 | 744 | | |
| | | 0 | | | |

33.

33.

Ist die Zahl keine vollkommne Cubiczahl, so läßt sich die Wurzel nicht genau ausziehen, man begnügt sich dann, sie, außer den ganzen Wurzeltheilen, noch in Decimalbrüchen so genau zu finden, als es die Umstände erfordern. Zu dem Ende hängt man an den letzten Rest drey Nullen, dann erhält man die Wurzel noch in einem Decimaltheil. Hängt man an den bleibenden Rest noch drey Nullen, so bekommt man die Wurzel auch noch in einem Decimaltheil mehr u. s. w. Ueberhaupt hängt man an die Zahl dreymahl so viel Nullen, als man die Wurzel in Decimaltheilen verlangt. Man vergleiche hiemit die Vorstellung bey Ausziehung der Quadratwurzel von diesem Fall §. 20. Soll man z. B. die Cubicwurzel aus der Zahl 63 ziehen, so verfährt man dabei folgendergestalt.

63 | 3,97
$a^3 = 27$ | a+b:
36000 a+b

$3a^2 = 3 \cdot 3^2 = (27)$
$3a^2b = 27 \cdot 9 = 243$
$3ab^2 = 3 \cdot 3 \cdot 9^2 = 729$
$b^3 = 9^3 = 729$

32319

3681000

$3a^2 = 3 \cdot 39^2 = (4563)$
$3a^2b = 4563 \cdot 7 = 31941$
$3ab^2 = 3 \cdot 39 \cdot 7^2 = 5733$
$b^3 = 7^3 = 343$

3251773

Rest. 429227

34.

Mit einer Zahl, woran schon ein Decimalbruch hängt, verfährt man, wie es für diesen Fall schon bey Ausziehung der Quadratwurzel gezeigt worden. Sollten in die letzte Classe rechter Hand nicht auch drey Ziffern kommen, so mache man sie durch Anhängung einer oder zweyer Nullen vollzählig.

Man habe z. B. die Zahl 16,00031. Hier müssen gleich zwey Nullen angehänget werden, weil für die letzte Classe nur eine Ziffer, nämlich die Eins, übrig bleibt, man zieht also dafür die Wurzel aus 16,003100.

16,|003'100||2,52

$a^3 = 2^3 =$ 8 |:::|:::||a+b :

8003 ::: a+b

$3a^2 = 3 \cdot 2^2 =$ (12) :::

$3a^2b = 12 \cdot 5 =$ 60 :::

$3a^2b = 3 \cdot 2 \cdot 5^2 =$ 150 :::

$b^3 = 5^3 =$ 125 :::

7625 :::

378100

$3a^2 = 3 \cdot 25^2 =$ (1875)

$3a^2b = 1875 \cdot 2 =$ 3750

$3ab^2 = 3 \cdot 25 \cdot 2^2 =$ 300

$b^3 = 2^3 =$ 8

378008

Rest = 92.

35.

Aus einem bloßen Decimalbruch wird die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl gezogen. Die Abtheilung der Decimaltheile selbst wird von der linken

gegen

gegen die rechte Hand gemacht. Der Mangel der Einheiten wird in der Wurzel durch eine Null angedeutet. Sollten auch vor den geltenden Ziefern des Bruchs noch eine oder mehrere Classen Nullen stehen, so kommen hinter die den Mangel der Einheiten anzeigenden Null noch so viel Nullen, als die Cubiczahl volle Classen von Nullen hat.

1. So ist z. B. $\sqrt[3]{}$ 0,001728 = 0,12.

0,001 | 728 ‖ 0, 1 2

$a^3 = 1^3 =$ 1 ::: ‖ a+b

728

$3a^2 = 3 \cdot 1^2 =$ (3)

$3a^2b = 3 \cdot 2 =$ 6

$3ab^2 = 3 \cdot 1 \cdot 2^2 =$ 12

$b^3 = 2^3 =$ 8

728

0

2. $\sqrt[3]{}$ 0,000001728 = 0,012.

0,000 | 001 | 728 ‖ 0,0 1 2

$a^3 = 1^3 =$ 1 a+b

728

$3a^2 = 3 \cdot 1^2 =$ (3)

$3a^2b = 3 \cdot 2 =$ 6

$3ab^2 = 3 \cdot 1 \cdot 2^2 =$ 12

$b^3 = 2^3 =$ 8

728

0

## 36.

Soll die Cubicwurzel aus einem gemeinen Bruch gezogen werden, und betrifft dies beyde Theile

desselben, so zieht man entweder die Cubicwurzel wirklich aus jedem Theile besonders, oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und zieht aus diesem die Wurzel. Betrifft es aber nur einen von beyden Theilen, so zieht man die Cubicwurzel aus demselben Theil, denn in diesem Fall darf man den gemeinen Bruch vor Ausziehung der Wurzel nicht in einen Decimalbruch verwandeln. So ist z. B.

1. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$. Weil aber

$\frac{27}{125} = 0,216$

ii. $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$

---

so ist $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{0,216} = 0,6 = \frac{3}{5}$.

2. $\frac{\sqrt[3]{125}}{6} = \frac{5}{6}$.

3. $\frac{5}{\sqrt[3]{216}} = \frac{5}{6}$.

37.

Will man sich überzeugen, ob die gefundene Zahl die Wurzel sey, so darf man dieselbe nur wieder in die dritte Potenz erheben und den etwa gebliebenen Rest dazu nehmen, da dann die Zahl wieder zum Vorschein kommen muß. So fand man §. 33. $\sqrt[3]{63} = 3,97$, und übrig blieb 429227. Es ist aber

$3,97^3 = 62,570773$

hiezu den Rest $= 429227$

$63,000000 = 63\frac{000000}{1000000} = 63$.

38.

Weil a.a.a = $a^3$ und —a.—a.—a = —$a^3$, so folgt, daß sich die Cubicwurzel so wohl aus einer positiven als auch negativen Größe ziehen lasse. Aber auch selbst die Wurzel kann positiv und negativ seyn.

## C.

## Das Ausziehen der Biquadratwurzel.

39.

Da auch der Fall vorkommt, daß man die Biquadratwurzel aus einer Zahl oder Größe ziehen soll, so darf man nur in diesem Fall aus der gegebenen Zahl die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel ziehen, so erhält man die vierte oder Biquadratwurzel.

40.

Man könnte aber auch durch die allgemeine Formel eines Binomiums in der vierten Dignität die Theile kennen lernen, woraus ein solches Biquadrat besteht, und daraus dann die Regeln herleiten, vermittelst welcher man die Biquadratwurzel auf einmahl finden kann; dann müßte man sich aber auch die Biquadrate der einfachen Zahlen bekannt machen, oder eine Tabelle derselben bey der Hand haben.

| Die Wurzeln. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6. | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Die 4te Potenz. | 1 | 16 | 81 | 256 | 625 | 1296 | 2401 | 4096 | 6561 |

41.

Da $(a+b)^4$ = $(a+b)$ in $(a+b)^3$
= $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, so findet man daraus die Wurzel wieder folgendergestalt:

$$\begin{array}{l|l} a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & a + b \\ a^4 & \\ \hline 4a^3 :) \quad 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & \\ \quad 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. & \\ \hline \quad 0. & \end{array}$$

1. Man theilt zuerst die Zahl in Klassen von vier Ziefern, doch kann auch die erste Klasse linker Hand nur drey, zwey oder gar nur eine Ziefer enthalten.

2. Der erste Theil der Wurzel ist leicht zu finden; denn man darf nur die Zahl der ersten Klasse mit einem Biquadrat der einfachen Zahlen §. 40. vergleichen. Die darüber stehende Zahl ist dann der erste Theil der Wurzel; das Biquadrat aber dieser Wurzel wird von der ersten Klasse abgezogen, und zum etwa bleibenden Rest die folgende Klasse gesetzt.

3. Den zweyten Theil der Wurzel findet man, wenn man die höchste Zahl der folgenden Klasse und was sonst etwa noch von der ersten Klasse übrig geblieben ist, durch den vierfachen Cubus des gefundenen ersten Theils dividirt. Mit dem Quotienten erhält man dann den zweyten Theil der Wurzel.

4. Dann zieht man von dem Rest des ganzen Biquadrats die Summa folgender vier Producte ab:

a. Den vierfachen Cubus des ersten Theils in den zweyten oder $4a^3$.

b. Das sechsfache Quadrat des ersten Theils ins Quadrat des zweyten Theils oder $6a^2b^2$.

c. Den vierfachen Cubus des zweyten Theils in den ersten oder $4ab^3$.

d. Das Biquadrat des zweyten Theils oder $b^4$.

Ist die gegebene Zahl ein vollkommenes Biquadrat, so darf nach Abzug der Summe dieser vier Partialproducte nichts übrig bleiben, und man hat dann die wahre Biquadratwurzel gefunden.

## Anmerkung.

Besteht die Zahl aus drey oder mehr Klassen, so findet man den dritten Theil der Wurzel, wenn man die gefundenen beyden ersten Theile als einen und zwar als den ersten Theil betrachtet, und dann nach der dritten Regel verfährt. Auf eben die Art wird der vierte Theil der Wurzel gefunden ꝛc. Folgende Beyspiele werden das Verfahren deutlicher machen.

1. Man soll die $\sqrt[4]{}$ 390625 ziehen.

| | | |
|---|---|---|
| | 39 \| 0625 | 2 5 |
| $a^4 = 2^4 =$ | 16 | a+b |
| | 23 \| 0625 | |
| $4a^3 = 4.2^3 =$ | (3 \| 2)... | |
| $4a^3b = 32.5 =$ | 160... | |
| $6a^2b^2 = 6.2^2.5^2 =$ | 600.. | |
| $4ab^3 = 4.2.5^3 =$ | 1000. | |
| $b^4 = 5^4 =$ | 625 | |
| | 230625 | |
| | 0 | |

2. Man soll $\sqrt[4]{}$ 72264280 7056 ziehen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 7226 | 4280 | 7056 |
| $a^4 =$ | $9^4 =$ | 6561 | | |
| | | 665 | 4280 | |
| $4a^3 =$ | $4 \cdot 9^3 =$ | (291 | 6)... | |
| $4a^3b =$ | $2916 \cdot 2 =$ | 583 | 2... | |
| $6a^2b^2 =$ | $6 \cdot 9^2 \cdot 2^2 =$ | 19 | 44.. | |
| $4 \cdot ab^3 =$ | $4 \cdot 9 \cdot 2^3 =$ | | 288. | |
| $b^4 =$ | $2^4 =$ | | 16 | |
| | | 602 | 9296 | |
| | | 62 | 4984 | 7056 |
| $4a^3 =$ | $4 \cdot 92^3 =$ | (31 | 1475 | 2)... |
| $4a^3b =$ | $4 \cdot 92^3 \cdot 2 =$ | 62 | 2950 | 4... |
| $6a^2b^2 =$ | $6 \cdot 92^2 \cdot 2^2 =$ | | 2031 | 36.. |
| $4ab^3 =$ | $4 \cdot 92 \cdot 2^3 =$ | | 2 | 944. |
| $b^4 =$ | $2^4 =$ | | | 16 |
| | | 62 | 4984 | 7056 |
| | | | 0 | |

922
a+b :
a+b

42.

Man kann aber, wie schon gesagt, denselben Zweck erreichen, wenn man aus der gegebenen Zahl erst die Quadratwurzel zieht, und aus der gefundenen Quadratwurzel von neuen die Quadratwurzel sucht. Dies Verfahren ist auch auf alle Fälle bequemer. Zum Beweise diene das erste Exempel. Es soll nemlich die Biquadratwurzel aus 390625 gezogen werden.

Es ist aber $\sqrt{390625} = 625$

$\sqrt{625} = 25$

Folglich $\sqrt{\sqrt{390625}} = 25$.

a+b

$$\begin{array}{rrrr

44.

Die Wurzel aus einer Potenzgröße ist gleich derselben Größe mit ihrem durch den Exponenten des Wurzelzeichens dividirten Exponenten.

So ist z. B. $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}}$.

Beweis.

Weil $a^8 = a^4 . a^4$

$a^4 . a^4 = a^{4 \cdot 2}$

so ist $a^8 = a^{4 \cdot 2}$ II. §. 3.

Folglich auch $a^{\frac{8}{2}} = a^{\frac{4 \cdot 2}{2}}$

oder $a^{\frac{8}{2}} = a^4$

$a^4 = \sqrt{a^8}$

F. $a^{\frac{8}{2}} = \sqrt{a^8}$.

Eben so ist auch $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, und allgemein $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

45.

Anstatt also die Wurzel auf die bisher angezeigte Art auszuziehen, darf man nur die Größe, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, in eine Potenz erheben, deren Exponent gleich ist dem Exponenten der Größe selbst, dividirt diesen Exponenten durch den Exponenten des Wurzelzeichens; oder man erhebt allgemein die Größe in die Dignität $\frac{m}{n}$; der Zähler m aber bedeutet den Exponenten der Größe, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, und der Nenner n den Exponenten des Wurzelzeichens. Setzt man nun $\frac{m}{n}$ anstatt m in jener Formel §. 6., so bekommt man dafür folgende Formel.

$\sqrt[n]{(a+b)^m}$

$$\sqrt[n]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ +$$
$$\frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ + \frac{m-5n}{6n} FQ \text{ u. s. w.}$$

46.

Wenn man daher z. B. die Wurzel aus 2 ziehen sollte, so zerfälle man 2 in das nächst kleinere Quadrat = 1; und betrachte dieses nächst kleinere Quadrat als den ersten Theil, dann ist der andere Theil $= 2 - 1 = 1$. Folglich $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$.

Man setze den ersten Theil $1 = P$; den andern Theil dividirt durch den ersten oder $\frac{1}{1} = 1 = Q$, den Zähler des Exponenten $1 = m$, den Nenner $2 = n$, so ist

$$\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ +$$
$$\frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber $P^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = \ldots\ldots = 1 = A.$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{8} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-4}{6} \cdot -\frac{1}{8} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{16} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{1-6}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 = -\frac{5}{128} = E.$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = \frac{1-8}{10} \cdot -\frac{5}{128} \cdot 1 = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{5}{128} \cdot 1 = \frac{7}{256} = F.$$

$$\frac{m-5n}{6n} FQ = \frac{1-10}{12} \cdot \frac{7}{256} \cdot 1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{256} \cdot 1 = -\frac{21}{1024} = G.$$

Folgl. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256} - \frac{21}{1024}$ u. s. w.

Nun

Nun ist $\frac{1}{2}$ = 0,5
$\frac{1}{16}$ = 0,0625
$\frac{7}{256}$ = 0,02734375

Folglich $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{7}{256}$ = 1,58984375

Ferner $\frac{1}{8}$ = 0,125
$\frac{5}{128}$ = 0,0390625
$\frac{21}{1024}$ = 0,0205078125

Folglich $\frac{1}{8}+\frac{5}{128}+\frac{21}{1024}$ = 0,1845703125

Folgl. $\sqrt{2}$ = 1,4052734375

Zieht man die Wurzel auf gewöhnliche Art aus 2, so erhält man in zehen Decimalstellen $\sqrt{2}$ = 1,4142135623 . . . Folglich beträgt der Unterschied noch kein 0,009, um welches die Wurzel in jenen sieben Gliedern kleiner gefunden worden.

47.

Da man jede andere Größe und ihre Theile als Producte dieser Theile in 1 ansehen kann, so kann man die Glieder dieser Reihe als die Coefficienten der Wurzeltheile einer jeden Potenzgröße, daraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, betrachten. Man braucht daher nur jedes gefundene Glied in Q zu multipliciren, um das folgende Glied zu erhalten. Multiplicirt man dann jedes gefundene Glied noch in das correspondirende Glied der Reihe §. 46., so erhält man die Wurzel einer jeden andern Potenzgröße.

Soll daher die Quadratwurzel aus $a^2 + x^2$ gezogen werden, so ist $\sqrt{a+x^2} = (a+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Setzt man nun $a^2 = P$, $\frac{x^2}{a^2} = Q$, $1 = m$ und $2 = n$, so ist ohne auf die Coefficienten zu sehen

$P^{\frac{m}{n}}$

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} = \ldots\ldots a = A.$$

$$AQ = a \cdot \frac{x^2}{a^2} = \ldots\ldots \frac{x^2}{a} = B.$$

$$BQ = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \ldots\ldots \frac{x^4}{a^3} = C.$$

$$CQ = \frac{x^4}{a^3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \ldots\ldots \frac{a^6}{x^5} = D.$$

Man sieht nun schon, nach welchem Gesetz die folgenden Glieder der Reihe zu formiren sind. Nemlich das erste Glied enthält die Wurzel aus dem ersten Theil der gegebenen Dignität. Vom zweyten Gliede der Reihe an sind die Zähler allemahl der andere Theil der gegebenen Dignität, so daß die Exponenten in einer arithmetischen Reihe, deren Differenz gleich dem Exponenten der Dignität des andern Gliedes, wachsen: als $x^2$, $x^4$, $x^6$ u. s. w. Die Nenner aber gehen ebenfalls in einer arithmetischen Reihe fort, deren erstes Glied gleich der Wurzel aus dem ersten Theil der gegebenen Dignität, die Differenz aber allemahl gleich 2, also a, $a^3$, $a^5$ u. s. w.

Multiplicirt man nun jedes Glied dieser Reihe in das correspondirende Glied von $\sqrt{1 \dagger 1}$ §. 46., so erhält man

$$\sqrt{a^2 \dagger x^2} = a \dagger \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \dagger \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \dagger \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}.$$

## Anmerkung.

Daß die Zeichen hier abwechseln müssen, sieht man leicht ein, ohnerachtet beyde Theile der gegebenen Dignität positiv sind, weil die Zeichen der Glieder der vorigen Reihe §. 46. abwechseln, und die gleichnahmigen Glieder beyder Reihen in einander

der multiplicirt sind. Es ist nemlich ohne auf die Coefficienten zu sehen.

$$\sqrt{a^2+x^2} = a+\frac{x^2}{a}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^6}{a^5}+\frac{x^8}{a^7}+\frac{x^{10}}{a^9} \cdots$$

$$\sqrt{1+1} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}+\frac{7}{256} \cdots$$

$$\text{F.}\sqrt{a^2+x^2} = a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9} \cdots$$

48.

Eben so findet man die Quadratwurzel aus $a^2-x^2$. Es ist hier $P = a^2$, $Q = -\frac{x^2}{a^2}$, $m = 1$, $n = 2$. Sieht man nun nicht auf die Coefficienten, so müssen die Glieder abwechselnd positiv und negativ werden, und zwar die ungeraden Glieder positiv, die geraden Glieder aber negativ. Da aber die gleichnahmigen Glieder aus der Coefficienten Reihe allemahl das entgegen gesetzte Zeichen haben, so müssen nach geschehener Multiplication der gleichnahmigen Glieder beyder Reihen in einander alle Glieder außer dem ersten negativ werden. Es ist folglich

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} a-\frac{x^2}{a}+\frac{x^4}{a^3}-\frac{x^6}{a^5}+\frac{x^8}{a^7}-\frac{x^{10}}{a^9}+\frac{x^{12}}{a^{11}} \cdots \\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}+\frac{7}{256}-\frac{21}{1024} \cdots \end{cases}$$

$$\text{d.i.}\sqrt{a^2-x^2} = a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$$

Auf gleiche Art findet man $\sqrt{a^2+4y^2}$.

$$(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} a+\frac{4y^2}{a}+\frac{4^2y^4}{a^3}+\frac{4^3y^6}{a^5}+\frac{4^4y^8}{a^7} \cdots \\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128} \cdots \end{cases}$$

$$\text{d.i.}\sqrt{a^2+4y^2} = a+\frac{4y^2}{2a}-\frac{4^2y^4}{8a^3}+\frac{4^3y^6}{16a^5}-\frac{5\cdot 4^4y^8}{128a^7} \cdots$$

$$= a+\frac{2y^2}{a}-\frac{2y^4}{a^3}+\frac{4y^6}{a^5}-\frac{10y^8}{a^7} \cdots$$

Sieben=

# Siebentes Kapitel.
## Von den Verhältnissen und Proportionen.
### I.
### Von den Verhältnissen.
1.

Vergleicht man zwey Zahlen oder überhaupt zwey Dinge in Ansehung ihrer Größe mit einander, so erfährt man ihren Unterschied, und diesen nennt man ihr Verhältniß. Es werden also zu jedem Verhältniß zwey Größen erfordert, und diese heißen die Glieder des Verhältnisses, und zwar das eine das Vorder- das andere das Hinterglied.

2.

Man kann aber bey dieser Vergleichung untersuchen entweder um wie viel, oder wie vielmahl die eine Zahl größer oder kleiner sey, als die andere. Im ersten Fall hat man ein arithmetisches, im andern ein geometrisches Verhältniß.

### A.
### Vom arithmetischen Verhältniß.
3.

Die Absicht, weshalb man zwey Größen in ein arithmetisches Verhältniß bringt, ist: man will eine dritte Größe, nämlich ihren Unterschied oder Differenz erforschen. Man pflegt daher auch diese Absicht am schicklichsten durch das Subtractionszeichen anzudeuten, welches man zwischen die beyden zu vergleichenden Größen oder Verhältnißglieder setzt. Z. B. 9 — 4 oder allgemein a — b.

4.

Sieht man nun bey einem solchem Verhältniß auf die Differenz der beyden Glieder, so versteht sichs von selbst, daß die Glieder zwar gleichartig

seyn

seyn müssen, sie dürfen aber einander nicht gleich seyn, das heißt, das eine muß größer seyn, als das andere.

Setzt man nun das größere Glied = a, das kleinere = b und die Differenz = d, so ist

1. das größere Glied gleich der Summe aus dem kleinern und der Differenz, oder a = b + d.
2. Das kleinere Glied gleich dem größern weniger der Differenz oder b = a − d.
3. Die Differenz gleich dem größern Gliede weniger dem kleinern, oder d = a − b.

Wenn daher a = 9, b = 4, und d = 5; so ist

9 = 4 + 5.
4 = 9 − 5.
5 = 9 − 4.

5.

Sind zwey arithmetische Verhältnisse einem dritten gleich, so sind jene beyden auch gleich.

Wenn also 9 — 4 gleich 6 — 1
und 6 — 1 gleich 12 — 7

so ist auch 9 — 4 gleich 12 — 7.

B.

## Vom geometrischen Verhältniß.

Frägt man bey zwey Größen, wie vielmahl die eine in der andern enthalten, oder der wie vielste Theil die eine von der andern sey, so stehen diese Größen in einem geometrischen Verhältniß. Da man nun dieses erfährt, wenn man die größere durch die kleinere dividirt, so ist das schicklichste Zeichen, wodurch das geometrische Verhältniß zweyer Größen angedeutet wird, das Divisionszeichen (:). Auch stehn die Theile eines Bruchs in

geo-

geometrischen Verhältniß. Z. B. 6 : 18 oder $\frac{18}{6}$ oder $\frac{6}{18}$ und allgemein a : b oder $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$.

7.

Die relative Größe, welche das Verhältniß der beyden Glieder gegen einander ausdrückt, und anzeigt, wie vielmahl das eine Glied größer sey als das andere, oder was für ein aliquoter Theil das kleinere von dem größern sey, heißt der Exponent des Verhältnisses. So ist z. B. von 4 : 12 der Exponent 3, und allgemein ist von a : am der Exponent m.

8.

Man hat also bey einem geometrischen Verhältniß zu sehen theils auf das größere Glied, es sey = a, theils auf das kleinere = b, theils auf den Exponenten = m.

Das größere Glied ist gleich dem Product aus dem kleinern in den Exponenten, oder a = bm.

Das kleinere Glied ist gleich dem Quotienten aus dem größern Gliede dividirt durch den Exponenten, oder $b = \frac{a}{m}$.

Der Exponent ist gleich dem Quotienten aus dem größern Gliede dividirt durchs kleinere oder $m = \frac{a}{b}$.

9.

Wenn zwey geometrische Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind auch jene selbst gleich. Wenn daher

3 : 12 gleich 2 : 8
und 2 : 8 gleich $2\frac{1}{2}$ : 10

so ist auch 3 : 12 gleich $2\frac{1}{2}$ : 10.

10.

Multiplicirt man beyde Glieder eines Verhältnisses in einerley dritte Größe, so haben die Producte dasselbe Verhältniß; eben so auch wenn beyde Größen durch einerley dritte Größe dividirt werden. Z. B.

$$\frac{12 : 3}{60 : 15} (5 \quad \text{und} \quad 3) \frac{6 : 9}{2 : 3}.$$

und allgemein

$$\frac{a : b}{an : bn} (n \qquad e) \frac{an : bn}{\frac{an}{c} : \frac{bn}{c}}.$$

11.

Addirt man die gleichnahmigen Glieder zweyer oder mehrerer geometrischen Verhältnisse, so verhalten sich die Summen derselben wie die Glieder jedes dieser Verhältnisse. Man habe z. B.

$$\begin{array}{r} 2 : 3 \\ 4 : 6 \\ 1 : \frac{3}{2} \\ 5 : 7\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

so ist $2 + 4 + 1 + 5 : 3 + 6 + \frac{3}{2} + 7\frac{1}{2}$ wie $2 : 3$
wie $4 : 6$ ꝛc.

Anmerkung.

Dasselbe Verhältniß bleibt auch dann noch, wenn man gleichnahmige Glieder beyder Verhältnisse subtrahirt. Z. B.

$$\begin{array}{r} 2 : 3 \\ 4 : 6 \\ 1 : 1\frac{1}{2} \\ 5 : 7\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

Folgl. $5 - 1 + 4 - 2 : 7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} + 6 - 3$ wie $2 : 3$
wie $4 : 6$ ꝛc.

## II.
## Von den Proportionen.

12.

Zwey gleiche und ähnliche Verhältnisse geben eine Proportion. Es sind aber ein Paar Verhältnisse gleichartig.

1. Wenn in beyden einerley Absicht der Vergleichung Statt findet, d. i. wenn in beyden entweder auf den Unterschied der Glieder oder auf den Exponenten gesehen wird.
2. Wenn sich in beyden Verhältnissen entweder eben dieselbe Differenz oder derselbe Exponent befindet.
3. Wenn beyde Verhältnisse entweder mit dem größern oder mit dem kleinern Gliede anfangen.

13.

Eine Proportion besteht also aus zweymahl zwey oder vier Gliedern, davon heißt das erste Paar die Vorderglieder, das andere Paar die Hinterglieder. Die Glieder selbst aber heißen gleichnahmige oder homologe Glieder, wenn vom ersten und dritten, oder vom zweyten und vierten die Rede ist. Das erste und vierte aber nennt man die äußern Glieder, im Gegensatz des zweyten und dritten, welche die mittlern Glieder genennet werden.

### A.
### Von der arithmetischen Proportion.

14.

Eine arithmetische Proportion besteht aus zwey gleichen arithmetischen Verhältnissen. Sollen aber zwey solche arithmetische Verhältnisse eine Proportion machen, so verbindet man sie durch das Zeichen der Gleichheit mit einander. So sind 9—4 und

8 — 3 zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, sollen nun diese eine Proportion machen, so zeigt man dies folgendergestalt an: 9 — 4 = 8 — 3 und wird gelesen: Wie sich 9 verhält zu 4, so verhält auch 8 zu 3.

15.

Da das größere Glied eines Verhältnisses allemahl gleich ist der Summe aus dem kleinern und der Differenz, das kleinere aber gleich dem größern weniger der Differenz §. 4. so kann man, wenn zwey homologe Glieder und die Differenz bekannt sind, auch die beyden andern homologen Glieder bestimmen, und daraus die ganze Proportion machen. Es sey z. B. das erste und kleinere Glied = a, das dritte Glied = b, die Differenz = d, so ist das zweyte Glied = a + d, das vierte = b + d, und man erhält folgende allgemeine Proportion.

$$a - (a + d) = b - (b + d).$$

Wäre aber a das größere Glied gewesen, so wäre das zweyte = a — d, das vierte = b — d, und dann wäre die Proportion a — (a — d) = b — (b — d).

16.

Die arithmetischen Proportionen werden wieder eingetheilt in unstetige oder discrete und in stetige oder continuirliche. Jene bestehn aus vier verschiedenen Gliedern z. B.

$$a - (a + d) = b - (b + d)$$

oder $4 - 7 = 9 - 12$.

Die continuirlichen aber bestehn nur aus drey verschiedenen Gliedern, weil in diesen das zweyte und dritte einander gleich sind. Z. B.

a —

$a - (a+d) = (a+d) - (a+d+d)$, oder weil $(a+d+d) = a+2d$,

so ist die contin. Prop. $a - (a+d) = (a+d) - (a+2d)$; denn zwischen dem dritten und vierten Gliede ist eben die Differenz, die zwischen dem ersten und zweyten ist. Eben so ist $4 - 7 = 7 - 10$.

## 17.

Von einer steten Proportion braucht also nur ein Glied und die Differenz bekannt zu seyn, so lassen sich auch die übrigen Glieder bestimmen. Es sey z. B. das erste Glied $= a$, und die Differenz $= d$, so ist die Proportion wie oben §. 16: $a - (a+d) = (a+d) - (a+2d)$; oder wenn $a = 5$, $d = 2$, so ist $5 - 7 = 7 - 9$.

Oder es sey das zweyte Glied $= a$, die Differenz $= d$ bekannt, so ist $(a+d) - a = a - (a-d)$; oder wenn $a = 4$, $d = 3$, so ist $7 - 4 = 4 - 1$. u. s. w.

Von einer discreten Proportion aber muß außer der Differenz allemahl ein Glied von jedem Verhältniß bekannt seyn. Wenn daher das erste Glied oder $a = 2$, das dritte Glied oder $b = 4$, die Differenz oder $d = 5$, so bekommt man anstatt der allgemeinen Proportion §. 16. folgende:

$2 - (2+5) = 4 - (4+5)$ oder $2 - 7 = 4 - 9$.

## 18.

Beyde Arten haben indessen folgende Eigenschaft gemein. Die Summe der äußern Glieder ist gleich der Summe der mittlern Glieder. Wenn daher

$$\frac{a - (a+d) = b - (b+d)}{\text{so ist } a+b+d = a+d+b}$$

$$\text{Oder wenn } \frac{2-7=4-9}{\text{so ist } 2+9=7+4}$$

$$\text{Und wenn } \frac{a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)}{\text{so ist } a+a+2d=a+d+a+d}$$

$$\text{d. i. } 2a+2d=2a+2d.$$

$$\text{Oder wenn } \frac{2-5=5-8}{\text{so ist } 2+8=5+5.}$$

Ist daher die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern, so kann man umgekehrt schließen, daß sich die vier Größen in einer arithmetischen Proportion befinden.

19.

In einer discreten arithmetischen Proportion kann man aus dem ersten Gliede das vierte und aus dem vierten das erste machen, und auf eben die Art auch die mittlern Glieder mit einander verwechseln; bey einer continuirlichen Proportion aber findet nur eine Verwechselung der äußern Glieder statt.

Man habe z. B. $5-7=10-12$ oder $a-(a+d)=b-(b+d)$

| | | |
|---|---|---|
| so wird daraus a) | $12-7=10-5$ | $(b+d)-(a+d)=b-a)$ |
| b) | $5-10=7-12.$ | $a-b=(a+d)-(b+d)$ |
| und aus | $2-5=5-8$ | $a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$ |
| wird | $8-5=5-2$ | $(a+2d)-(a+d)=(a+d)-a.$ |

20.

Aus den drey ersten Gliedern einer jeden arithmetischen Proportion findet man das vierte, wenn man von der Summe der beyden mittlern Glieder das erste abzieht. Es sey z. B. das erste Glied $=a$, das zweyte $=b$, das dritte $=c$, so ist das vierte oder $x=b+c-a$.

Beweis.

Beweis.

Weil $a - b = c - x$

so ist $a + x = b + c$ §. 18.

$a = a$ I. §. 1.

F. $x = b + c - a$ I. §. 8.

Es ist daher das vierte Glied zu $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$

$= \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} - \frac{6}{12} = \frac{9+10-6}{12} = \frac{19-6}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$.

Es ist also $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{5}{6} - \frac{13}{12}$

Folgl. $\frac{1}{2} + \frac{13}{12} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

d. i. $\frac{6}{12} + \frac{13}{12} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12}$

d. i. $\frac{19}{12} = \frac{19}{12}$.

21.

Man kann aber auch allemahl aus drey Gliedern einer jeden arithmetischen Proportion jedes unbekannte Glied finden; denn man darf nur die Glieder der Proportion so ordnen, daß das fehlende Glied hinten hinkommt nach §. 19, dadurch wird dieser Fall auf den vorigen reducirt.

Man kann aber auch die Regel so abfassen: Jedes fehlende mittlere Glied ist gleich der Summe der beyden bekannten äußern Glieder weniger dem andern bekannten mittlern Gliede, und jedes unbekannte oder fehlende äußere Glied ist gleich der Summe der beyden bekannten mittlern, weniger dem andern bekannten äußern Gliede. So ist z. B.

in der Proportion $2 - 7 = 8 - 13$,

das erste Glied $= 7 + 8 - 13 = 2$.

das zweyte Glied $= 2 + 13 - 8 = 7$.

das dritte Glied $= 2 + 13 - 7 = 8$.

das vierte Glied $= 7 + 8 - 2 = 13$.

22.

Das mittlere Glied einer continuirlichen arithmetischen Proportion nennt man die mittlere arithmetische Proportionalgröße, und diese ist allemahl gleich der halben Summe der beyden äußern Glieder. Wenn daher die beyden äußern Glieder 10 und 15 sind,

so ist das mittlere $= \frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Beweis.

Weil $10 - x = x - 15$

so ist $2x = 10+15$ §. 18.

2) F. $x = \frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$. II. §. 15.

Es ist also $10 - 12\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2} - 15$

F. $10+15 = 12\frac{1}{2}+12\frac{1}{2} = 25$.

B.

## Von der geometrischen Proportion.

23.

Zwey gleiche und ähnliche durch das Zeichen der Gleichheit mit einander verbundene geometrische Verhältnisse, d. i. solche Verhältnisse, die nicht nur einerley Exponenten haben, sondern sich auch entweder mit dem größern oder kleinern Gliede anfangen, machen eine geometrische Proportion. So machen die beyden Verhältnisse 3:12 und 28:7 in dieser Ordnung keine Proportion; denn obgleich beyde einerley Exponenten haben, so ist doch das Hinterglied des zweyten Verhältnisses nicht ebenfalls das vierfache des Vordergliedes, wie im ersten Verhältniß. Aber 3:12 und 7:28 machen eine Proportion, denn hier haben beyde Verhältnisse einerley

ley Exponenten, und das zweyte Glied ist in beyden Verhältnissen das vierfache vom ersten Gliede.

24.

Weil jedes Verhältniß aus zwey Gliedern, jede Proportion aber aus zwey Verhältnissen besteht, so kann auch eine geometrische Proportion aus nicht weniger, als aus vier Gliedern bestehen. Wenn daher allgemein die Vorderglieder beyder Verhältnisse a und b heißen, der Exponent aber e ist, so erhält man folgende allgemeine Proportion.

$$a : ae = b : be.$$

25.

Da jeder Bruch das Verhältniß des Zählers zum Nenner ausdrückt, so lassen sich zwey gleiche Brüche in eine Proportion, und umgekehrt eine Proportion in zwey gleiche Brüche verwandeln. Wenn daher

$5 : 10 = 8 : 16$ und wenn $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

so ist $\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$ so ist $6 : 9 = 8 : 12$

Desgleichen $a : ae = b : be$

so ist $\frac{ae}{a} = \frac{be}{b}$ und umgekehrt.

26.

Eine geometrische Proportion ist ebenfalls entweder eine discrete oder eine continuirliche. Jene besteht aus vier verschiedenen Gliedern, diese aber nur aus drey, weil in diesem Fall das dritte Glied dem zweyten allemahl gleich ist. Im eigentlichen Verstande sind also auch hier vier Glieder, daher es mit der Bemerkung §. 24. seine Richtigkeit hat. So ist

$a:ae = b:be$ eine discrete geometrische Proportion; setzt man aber im dritten Gliede ebenfalls ae anstatt b, so ist $a:ae = ae:ae^2$ eine continuirliche geometrische Proportion.

27.

Beyde Arten haben diese Eigenschaft mit einander gemein, daß nämlich allemahl das Product der äußern Glieder gleich ist dem Product der mittlern. Wenn also

$$a:ae = b:be.$$

so ist $a \cdot be = ae \cdot b.$

Beweis.

Weil $a:ae = b:be$

so ist auch $\frac{ae}{a} = \frac{be}{b}$. §. 25.

$\frac{ae}{a} \cdot a = \frac{be}{b} \cdot a$ (a II. §. 12.

$\frac{ae}{a} \cdot a \cdot b = \frac{be}{b} \cdot a \cdot b$ (b II. §. 12.

$\frac{ae}{a} \cdot a \cdot b = ae \cdot b$, $\frac{be}{b} \cdot a \cdot b = be \cdot a$ II. §. 19.

F. $ae \cdot b = be \cdot a.$

Desgleichen wenn $a : ae = ae : ae^2$

so ist auch $ae \cdot ae = a \cdot ae^2.$

d. i. $a^2e^2 = a \cdot ae^2.$

Es ist also insbesondere bey einer continuirlichen geometrischen Proportion das Quadrat des mittlern Gliedes gleich dem Product der beyden äußern.

28.

Eine geometrische Proportion, dergleichen z. B. $a:b = c:d$, läßt sich auf verschiedene Art verändern,

ändern, ohne daß die Proportion aufgehoben wird. Die brauchbarsten Arten erhält man

1. Durch Verwechselung der Glieder, und zwar
   a. entweder der Glieder eines jeden Verhältnisses.

So wird aus der Proportion a:b = c:d
folgende b:a = d:c

Denn da durch diese Verwechselung der Exponent des Verhältnisses nicht verändert wird, überdem auch die Aehnlichkeit der homologen Glieder bleibt, so muß nothwendig auch die Proportion bleiben.

   b. Oder die beyden ganzen Verhältnisse.

Dann wird aus der Proportion a:b = c:d
folgende c:d = a:b;

Denn da diese Versetzung auf den Exponenten keinen Einfluß hat, so muß nothwendig auch bey dieser Verwechselung der Verhältnisse die Proportion bleiben.

   c. Oder der beyden äußern Glieder.

Dann erhält man anstatt a:b = c:d
folgende Proportion d:b = c:a

   d. Oder der beyden mittlern Glieder.

Dann wird aus der Prop. a:b = c:d
folgende a:c = b:d.

In diesen beyden Fällen bleibt zwar der alte Exponent nicht, es bekommen aber beyde Verhältnisse wieder einerley Exponenten, folglich stehen auch die Glieder in Proportion. Auch ist in allen diesen Fällen das factum extremorum gleich dem facto mediorum, nämlich jenes überall ad, dieses überall bc.

Noch einleuchtender wird dies, wenn man am anstatt b, und cm anstatt d setzt, dann wird aus der Proportion

$$a : am = c : cm.$$

a) $am : a = cm : c.$
b) $c : cm = a : am.$
c) $cm : am = c : a.$
d) $a : c = am : cm.$

Hier ist überall $acm = acm.$

29.

2. Durch die Addition, und zwar kann man addiren
a. zum ersten und dritten Gliede das zweyte und vierte.

Dann erhält man anstatt $a : b = c : d$
folgende Proportion $a + b : b = c + d : d.$

Beweis.

Wenn $a : b = c : d$

so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ §. 25.

$\frac{b}{b} = \frac{d}{d}$ V. §. 46.

F. $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$ (II. §. 6.)

oder $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$ (V. §. 49.)

Folgl. $a + b : b = c + d : d.$ §. 25, das heißt: die Summe des ersten und zweyten Gliedes verhält sich zum zweyten, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede.

b. Oder zum zweyten und vierten das erste und dritte Glied.

Wenn daher $a : b = c : d,$
so ist auch $a : a + b = c : c + d.$

Be-

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

so ist auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ §. 25.

$\frac{a}{a} = \frac{c}{c}$ (V. §. 46.)

Folgl. $\frac{b}{a} + \frac{a}{a} = \frac{d}{c} + \frac{c}{c}$ (II. §. 6.)

oder $\frac{b + a}{a} = \frac{d + c}{c}$ (V. §. 49.)

Folgl. $a : a + b = c : c + d$. §. 25. das heißt: das erste Glied verhält sich zur Summe aus dem ersten und zweyten, wie das dritte Glied zur Summe aus dem dritten und vierten Gliede.

30.

3. Durch die Subtraction, und zwar kann man

a. entweder vom ersten und dritten abziehen das zweyte und vierte Glied.

Wenn also $a : b = c : d$
so ist auch $a - b : b = c - d : d$

Beweis.

Wenn $a : b = c : d$ ex hypoth.

so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ §. 25.

$\frac{b}{b} = \frac{d}{d}$ (V. §. 46.)

Folgl. $\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$ (II. §. 8.)

oder $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$ (V. §. 51.)

F. $a - b : b = c - d : d$. §. 25, das heißt: die Differenz zwischen dem ersten und zweyten Gliede verhält

verhält sich zum zweyten Gliede, wie die Differenz zwischen dem dritten und vierten Gliede zum vierten Gliede.

b. Oder man kann auch vom zweyten und vierten Gliede das erste und dritte Glied abziehen.

Dadurch wird aus der Prop. $a : b = c : d$
folgende $a : b - a = c : d - c$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

so ist auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ §. 25.

$1 = 1$ (II. §. 1.)

Folglich $\frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1$ (II. §. 8.)

$1 = \frac{a}{a}$, $1 = \frac{c}{c}$ (V. §. 46.)

Folglich $\frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{d}{c} - \frac{c}{c}$ (II. §. 3.)

oder $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$ (V. §. 51.)

Folglich $a : b - a = c : d - c$. §. 25.

31.

4. Durch die Multiplication, wenn man nämlich folgende Glieder in einerley Zahl oder Größe m multiplicirt:

a. Entweder das erste und zweyte Glied.

Dadurch wird aus der Prop. $a : b = c : d$
folgende $am : bm = c : d$.

Beweis.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hypothesi.

so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ §. 25.

$\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m}$ (III. §. 53.)

F. $\frac{am}{bm} = \frac{c}{d}$ (II. §. 3.)

F. $am : bm = c : d.$ §. 25.

b. Oder das dritte und vierte Glied.

Dann bekommt man für $a : b = c : d$
diese Proportion $a : b = cm : dm.$

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ §. 25.

$\frac{c}{d} = \frac{c.m}{d.m}$ (III. §. 53.)

Folglich $\frac{a}{b} = \frac{cm}{dm}$ (II. §. 3.)

F. $a : b = cm : dm.$ §. 25.

c. Oder das erste und dritte Glied, d. i. das Vorderglied von beyden Verhältnissen.

Dann bekommt man anstatt $a : b = c : d$
folgende Proportion $am : b = cm : d.$

Beweis.

Weil $a : b = c : d$

so ist auch $a : c = b : d$ §. 28. d.

$a : c = am : cm$ (per num. a.)

F. $am : cm = b : d$ §. 9.

F. $am : b = cm : d$ §. 28. d.

d. Oder das zweyte und vierte Glied, d. i. das Hinterglied von beyden Verhältnissen.

Dadurch wird aus $a : b = c : d$

folgende Proportion $a : bm = c : dm$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$. ex hyp.

so ist auch $a : c = b : d$ §. 28 d.

$b : d = bm : dm$ (p. n. b.)

F. $a : c = bm : dm$ §. 9.

F. $a : bm = c : dm$ §. 28. d.

e. Oder alle vier Glieder der Proportion.

Man bekommt dann anstatt $a : b = c : d$

folgende Proportion $am : bm = c : dm$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

so ist auch $a : b = cm : dm$ (p. num. b.)

F. $c : d = cm : dm$ §. 9.

$c : d = am : bm$ (p. num. a.)

F. $am : bm = cm : dm$ §. 9.

32.

5. Durch die Division, und zwar wenn man folgende Glieder durch einerley Größe dividirt.

a. Entweder das erste und zweyte Glied.

Dann wird aus $a : b = c : d$

diese Proportion $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$

Beweis.

Weil $a : b = c : d$. ex. hyp.

und ist $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ §. 10.

so ist auch $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$ §. 9.

b. Oder

b. Oder das dritte und vierte Glied.

Dann wird aus $a : b = c : d$

folgende Proportion $a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$

$c : d = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$ §. 10.

---

so ist $a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$ §. 9.

c. Oder das erste und dritte Glied, d. i. das Vorderglied von beyden Verhältnissen.

Dann wird aus $a : b = c : d$

folgende Proportion $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

---

so ist auch $a : c = b : d$ §. 28. d.

$a : c = \frac{a}{m} : \frac{c}{m}$ (per num. a.)

---

Folglich $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = b : d$ §. 10.

Folglich $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$.

d. Oder das zweyte und vierte Glied, d. i. das Hinterglied von beyden Verhältnissen.

Dadurch wird aus $a : b = c : d$

folgende Proportion $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

so ist auch $a : c = b : d$ §. 28. d.

$b : d = \frac{b}{m} : \frac{d}{m}$ (per num. b.)

F. $a : c = \frac{b}{m} : \frac{d}{m}$ §. 10.

F. $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$ §. 28.

c. Oder alle vier Glieder der Proportion.

Dann wird aus $a : b = c : d$

folgende Proportion $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$.

Beweis.

Weil $a : b = c : d$ ex hyp.

und $c : d = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ (per num. a.)

so ist $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ §. 10.

und weil $a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$ (per num. b)

so ist auch $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$ §. 10.

33.

Die Producte aus den gleichnahmigen Gliedern zweyer oder mehrerer Proportionen machen eine neue Proportion. Wenn daher

1) $a : b = c : d$

und 2) $m : n = x : y$

so ist auch $am : bn = cx : dy$.

Beweis.

## Beweis.

Ist $a : b = c : d$ ex hyp.

so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ist ferner $m : n = x : y$ ex hyp.

so ist auch $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$ §. 25.

vorhin war $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Folglich $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y}$ (II. §. 12.)

d. i. $\frac{am}{bn} = \frac{cx}{dy}$

Folglich $am : bn = cx : dy$ §. 25.

Eben so wenn 1) $a : b = c : d$

2) $e : f = g : h$

3) $p : q = r : s$

so ist auch $aep : bfg = cgr : dhs$.

34.

Man kann daher auch eine Proportion verändern

6. Durch Erhebung der Glieder zu Potenzen. Dabey aber ist zu merken, daß alle Glieder und zwar zu einerley Potenz erhoben werden müssen.

Wenn daher $a : b = c : d$

so ist auch $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$

und $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$

und allgemein $a^m : b^m = c^m : d^m$.

35.

7. Durch Ausziehung der Wurzeln. Es muß aber die Wurzel aus allen Gliedern der Proportion, und zwar dieselbe Wurzel gezogen werden.

Wenn daher $a : b = c : d$

so ist auch $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$ (II. §. 21.)

desgleichen $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$

und allgemein $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

36.

Recapitulation aller angeführten Veränderungen geometrischer Proportionen.

Es sey die Fundamentalproportion $4 : 6 = 16 : 24$.

Veränderungen.

1) $6 : 4 = 24 : 16$. (§. 28. a)
2) $16 : 24 = 4 : 6$. (§. 28. b)
3) $24 : 6 = 16 : 4$. (§. 28. c.)
4) $4 : 16 = 6 : 24$. (§. 28. d.)
5) $4 + 6 : 6 = 16 + 24 : 24$. (§. 29. a)
d. i. $10 : 6 = 40 : 24$.
6) $4 : 4 + 6 = 16 : 16 + 24$. (§. 29. b.)
d. i. $4 : 10 = 16 : 40$.
7) $4 - 6 : 6 = 16 - 24 : 24$. (§. 30. a)
d. i. $-2 : 6 = -8 : 24$.
8) $4 : 6 - 4 = 16 : 24 - 16$. (§. 30. b)
d. i. $4 : 2 = 16 : 8$.
od. $4 : 4 - 6 = 16 : 16 - 24$
d. i. $4 : -2 = 16 : -8$
9) $4.3 : 6.3 = 16 : 24$ (§. 31. a)
d. i. $12 : 18 = 16 : 24$.
10) $4 : 6 = 16.2 : 24.2$ (§. 31. b.)
d. i. $4 : 6 = 32 : 48$.
11) $4.5 : 6 = 16.5 : 24$ (§. 31. c.)
d. i. $20 : 6 = 80 : 24$.
12) $4 : 6.3 = 16 : 24.3$ (§. 31. d.)
d. i. $4 : 18 = 16 : 72$.
13) $4.2 : 6.2 = 16.2 : 24.2$ (§. 31. e.)
d. i. $8 : 12 = 32 : 48$.

Ver-

Veränderungen. 14) $\frac{4}{2} : \frac{6}{2} = 16 : 24$ (§. 32. a.)
d.i. $2 : 3 = 16 : 24$.
15) $4 : 6 = \frac{16}{2} : \frac{24}{2}$ (§. 32. b.)
d.i. $4 : 6 = 8 : 12$.
16) $\frac{4}{2} : 6 = \frac{16}{2} : 24$. (§. 32. c.)
d.i. $2 : 6 = 8 : 24$.
17) $4 : \frac{6}{3} = 16 : \frac{24}{3}$. (§. 32. d.)
d.i. $4 : 2 = 16 : 8$.
18) $\frac{4}{2} : \frac{6}{2} = \frac{16}{2} : \frac{24}{2}$. (§. 32. e.)
d.i. $2 : 3 = 8 : 12$.
19) $4^2 : 6^2 = 16^2 : 24^2$. (§. 34.)
d.i. $16 : 36 = 256 : 576$.
20) $\sqrt{4} : \sqrt{6} = \sqrt{16} : \sqrt{24}$ (§. 35.)

37.

Wird das Verhältniß zweyer Größen nicht geändert nach §. 31., wenn man beyde in einerley dritte Größe multiplicirt, so kann man sich dieses Satzes mit Vortheil bedienen, die Brüche aus einem Verhältnisse wegzuschaffen, wenn man das Verhältniß oder auch eine ganze Proportion in den Nenner oder ins Product der Nenner multiplicirt. Wenn daher

1) $a : b = 2 : \frac{2}{3}$ (3
so ist auch $a : b = 6 : 2$

2) oder wenn $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} : \frac{15}{16}$ (6.16 = 96.
so ist auch $64 : 72 = 80 : 90$.

38.

Wenn das Verhältniß zweyer Größen nicht aufgehoben wird, wenn man nach §. 32. beyde Größen durch einerley dritte Größe dividirt, so kann man diesen Satz dazu brauchen, Verhältnisse und Proportionen, die in großen Zahlen ausgedruckt sind, in andere zu verwandeln, die aus kleinern Zahlen bestehen.

Wenn daher $a : b = 168 : 252.$

$12)$

so ist auch $a : b = 14 : 21$

$7)$

oder $a : b = 2 : 3.$

39.

Wenn ferner die Proportion nicht aufgehoben wird, wenn man die Glieder derselben nach §. 34. zu einerley Dignität erhebt, so kann man diesen Satz vortheilhaft brauchen, das Wurzelzeichen wegzuschaffen, indem man die ganze Proportion in diejenige Dignität erhebt, deren Exponenten das Wurzelzeichen führt. Wenn daher

$a : b = \sqrt{5} : \sqrt{10}$

so ist auch $a^2 : b^2 = \sqrt{5}.\sqrt{5} : \sqrt{10}.\sqrt{10}.$

$\sqrt{10}.\sqrt{10} = 10.$

$\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5.$

Folglich $a^2 : b^2 = 5 : 10.$

Anmerkung.

Die Lehre von den Proportionen ist durch die ganze Mathematik vom größten Nutzen; besonders aber kommt auch sehr viel auf die Verwandlungen an, welche mit ihnen vorgenommen werden können, daher muß man sich dieselbe so geläufig machen, daß man gleich weiß, welche Art nach Beschaffenheit der Umstände zu Erreichung des jedesmahligen Zwecks zu gebrauchen.

40.

Die bisher betrachteten Verhältnisse waren einfach, weil in denselben die Größen unmittelbar verglichen wurden. Es tritt aber auch oft der Fall ein, daß man zwey Größen, deren Verhältniß man ausdrucken will, nicht unmittelbar vergleichen kann;

dann

dann muß man noch eine dritte oder wohl gar noch mehrere dazu nehmen, deren Verhältniß zu jeder der beyden eigentlich zu vergleichenden Größen und deren Verhältniß auch zu einander bekannt ist; alsdann geschieht die Vergleichung mittelbar, und man erhält dann ein zusammengesetztes Verhältniß.

Wollte man z. B. das Verhältniß a und b, die sich unmittelbar nicht sollen vergleichen lassen, bestimmen, so nehme man noch eine Größe, etwa c zu Hülfe, deren Verhältniß zu a und b bekannt ist. Gesetzt es wäre

$$a : c = 2 : 3$$
$$\text{und } c : b = 4 : 5$$

$$\text{so ist } ac : bc = 2 \cdot 4 : 3 \cdot 5. \quad \S. 33.$$

Folglich c) $a : b = 8 : 15$. §. 32. a.

Es verhält sich also a : b, wie die Producte aus den gleichnahmigen Gliedern der Verhältnisse 2 : 3 und 4 : 5.

41.

Solche Größen, die sich nicht unmittelbar vergleichen lassen, befinden sich in ratione composita. Die Verhältnisse aber, wodurch man jener ihr Verhältniß erkennt, nennt man rationes componentes. Damit man nun sogleich erkennen könne, daß eine ratio composita da sey, so pflegt man die rationes componentes durch das Pluszeichen mit einander zu verbinden, und über jedes eine Querlinie zu ziehen; dann sieht die obige Proportion so aus:

$$a : b = \overline{2 : 3} + \overline{4 : 5}$$

42.

Wäre ferner $a : c = 3 : 1$
und $c : b = 3 : 1$

so ist $a : b = \overline{3 : 1} + \overline{3 : 1}$
d. i. $a : b = 3 \cdot 3 : 1 \cdot 1 = 3^2 : 1^2$.

In diesem Fall sagt man a und b sind in ratione duplicata der Größen 3 und 1.

43.

Wäre $a : c = 1 : 2$

$c : d = 3 : 4$

$d : b = 4 : 5$

so ist $a : b = 1 : 2 + 3 : 4 + 4 : 5$

d. i. $a : b = 1 \cdot 3 \cdot 4 : 2 \cdot 4 \cdot 5$.

d. i. $a : b = 12 : 40$

oder $a : b = 3 : 10$

Dies Verhältniß 3 : 10 würde man gleich bekommen haben, wenn man das letzte Glied 4 der zweyten Proportion gegen das dritte Glied 4 der dritten Proportion aufgehoben hätte. Wenn daher das letzte Glied der einen ratio componens gleich ist dem ersten Gliede einer andern ratio comp., so kann man diese Glieder gegen einander aufheben; oder wenn eins von den Gliedern der einen ratio componens ein aliquoter Theil ist von dem andern Gliede einer andern ratio comp. so kann man das größere durchs kleinere dividiren. Wenn daher

$a : c = 1 : x$

$c : d = x : 3$

$d : e = 3|9 : 7.$

$e : f = 4 : 3$

und $f : b = 3 : 4$

so ist $a : b = 3 : 7.$

Hier hebt im ersten Verhältniß 2 die 2 im zweyten Verhältniß. Die 3 im zweyten Verhältniß ist in 9 des dritten Verhältnisses 3mahl enthalten. Ferner wird die 4 im vierten Verhältniß durch die 4 im fünften Verhältniß, desgleichen die 3 im vierten Verhältniß durch die 3 im fünften Verhältniß auf-

aufgehoben. Es bleiben also bloß noch übrig 1.3 und hinten 7. Daher ist $a : b = 3 : 7$.

44.

Würde eine ratio composita durch drey gleiche rationes componentes bestimmt, so heißt sie ratio triplicata. Wenn daher z. B.

$$\begin{array}{r} a : b = 2 : 3 \\ b : c = 2 : 3 \\ c : d = 2 : 3 \\ \hline \text{so ist } a : d = 2 : 3 + 2 : 3 + 2 : 3 \\ \text{d. i. } a : d = 2.2.2 : 3.3.3 \\ \text{oder } a : d = 2^3 : 3^3. \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich von selbst, was man unter ratio quadruplicata u. s. w. zu verstehen habe.

45.

Vergleicht man zwey Proportionen mit einander, in welchen das erste Verhältniß einander gleich ist, so stehn auch die hintersten Verhältnisse in Proportion.

$$\begin{array}{r} \text{Es sey } a : am = b : bm \\ \text{und } a : am = c : cm \\ \hline \text{so ist auch } b : bm = c : cm \end{array}$$

Beweis.

Drückt man jedes Verhältniß durch einen Bruch aus,

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist } \frac{a}{am} = \frac{b}{bm} \\ \text{und } \frac{a}{am} = \frac{c}{cm} \end{array}\right\} \text{ §. 25.}$$

$$\begin{array}{rl} \text{F.} & \frac{b}{bm} = \frac{c}{cm} \quad \text{(II. §. 3.)} \\ \hline \text{F.} & b : bm = c : cm. \quad \text{§. 25.} \end{array}$$

46.

**Haben zwey Proportionen ein und dasselbe letzte Verhältniß, so stehen auch die ersten Verhältnisse in Proportion.**

Wenn daher $a : am = b : bm$

und $c : cm = b : bm$

so ist auch $a : cm = c : cm$.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{bm} = \frac{b}{bm} \\ \frac{c}{cm} = \frac{b}{bm} \end{array}\right\} \text{§. 25.}$$

$$\text{F.} \quad \frac{a}{am} = \frac{c}{cm} \quad \text{(II. §. 3.)}$$

F. $a : am = c : cm$. §. 25.

47.

**Ist von zwey Proportionen das erste Glied der ersten gleich dem zweyten Gliede der zweyten, das dritte Glied der ersten gleich dem vierten Gliede der zweyten Proportion, so machen die übrigen Glieder eine neue Proportion.**

Wenn also $a : am = b : bm$

und $ax : a = bx : b$

so ist auch $ax : am = bx : bm$.

Beweis.

Ist $a : am = b : bm$. ex hypothesi.

so ist auch $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$ §. 25.

Ist

Ist ferner $ax : a = bx : b$ ex hyp.

so ist auch $\frac{ax}{a} = \frac{bx}{b}$ §. 25.

vorhin war $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$

F. $\frac{ax}{a} \cdot \frac{a}{am} = \frac{bx}{b} \cdot \frac{b}{bm}$ (§. 12.)

d. i. $\frac{ax}{am} = \frac{bx}{bm}$

F. $ax : am = bx : bm$ §. 25.

48.

Ist in zwey Proportionen das zweyte Glied der ersten gleich dem ersten Gliede der zweyten, das vierte Glied der ersten gleich dem dritten Gliede der zweyten Proportion, so stehen auch die übrigen Glieder in Proportion.

Wenn daher $a : am = b : bm$

und $am : amx = bm : bmx$

so ist auch $a : amx = b : bmx$.

Beweis.

Aus der ersten Prop. wird $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$

Aus der 2ten Prop. wird $\frac{am}{amx} = \frac{bm}{bmx}$ } §. 25.

F. $\frac{a}{am} \cdot \frac{am}{amx} = \frac{b}{bm} \cdot \frac{bm}{bmx}$ (II. §. 12.)

d. i. $\frac{a}{amx} = \frac{b}{bmx}$

$a : amx = b\ bmx.$ §. 25.

49.

Sind von zwey Proportionen die äußern Glieder einander gleich, so stehn auch die mittlern Glieder in Proportion, und zwar so, daß das zweyte Glied

Glied der ersten sich verhält zum zweyten Gliede der zweyten, wie das dritte Glied der zweyten zum dritten Gliede der ersten Proportion.

Wenn daher $a : am = b : bm$

und $a : amx = \frac{b}{x} : bm$

so ist auch $am : amx = \frac{b}{x} : b.$

Beweis.

Aus der ersten Prop. wird $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$

aus der 2ten Prop. wird $\frac{amx}{a} = \frac{bm}{b:x}$ } §. 25.

Folglich $\frac{a}{am} \cdot \frac{amx}{a} = \frac{b}{bm} \cdot \frac{bm}{b:x}$ (II. §. 12.)

d. i. $\frac{amx}{am} = \frac{b}{b:x}$

F. $am : amx = \frac{b}{x} = b.$ §. 25.

50.

Wenn in zwey Proporitonen die mittlern Glieder einerley sind, so stehen auch die übrigen Glieder in eben der Ordnung, wie §. 49, in Proportion; es verhält sich nämlich das erste Glied der ersten Proportion zum ersten Gliede der zweyten, wie das vierte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten Proportion.

Wenn daher $a : am = b : bm$

und $amx : am = b : \frac{b}{x}$

so ist auch $a : amx = \frac{b}{x} : bm.$

Beweis.

Beweis.

Aus der ersten Prop. wird $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$

Aus der 2ten Prop. wird $\frac{am}{amx} = \frac{b:x}{b}$ } §. 25.

Folglich $\frac{a}{am} \cdot \frac{am}{amx} = \frac{b}{bm} \cdot \frac{b:x}{b}$ (II. §. 12.)

d. i. $\frac{a}{amx} = \frac{b:x}{bm}$

Folglich $a : amx = \frac{b}{x} : bm$ §. 25.

51.

Wenn in zwey Proportionen das zweyte Glied der ersten dem ersten Gliede der zweyten, das dritte Glied der ersten dem vierten Gliede der zweyten Proportion gleich ist, so verhält sich auch das erste Glied der ersten zum zweyten Gliede der zweyten, wie das dritte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten Proportion.

Wenn daher $a : am = b : bm$

und $am : amx = \frac{b}{x} : b$

so ist auch $a : amx = \frac{b}{x} : bm.$

Beweis.

Aus der ersten Prop. wird $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$

Aus der 2ten Prop. wird $\frac{am}{amx} = \frac{b:x}{b}$ } §. 25.

Folglich $\frac{a}{am} \cdot \frac{am}{amx} = \frac{b}{bm} \cdot \frac{b:x}{b}$ (II. §. 12.)

d. i. $\frac{a}{amx} = \frac{b:x}{bm}$

Folglich $a : amx = \frac{b}{x} : bm.$ §. 25.

52.

52.

Recapitulation dieser Vergleichungsarten in Zahlen.

1. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 2 : 4 = 5 : 10

so ist auch 6 : 12 = 5 : 10. §. 45.

2. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 5 : 10 = 6 : 12

so ist auch 2 : 4 = 5 : 10. §. 46.

3. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 3 : 2 = 9 : 6

so ist auch 3 : 4 = 9 : 12. §. 47.

4. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 4 : 3 = 12 : 9

so ist auch 2 : 3 = 6 : 9. §. 48.

5. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 2 : 3 = 8 : 12

so ist auch 4 : 3 = 8 : 6. §. 49.

6. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 3 : 4 = 6 : 8

so ist auch 2 : 3 = 8 : 12. §. 50.

7. Wenn 2 : 4 = 6 : 12
und 4 : 3 = 8 : 6

so ist auch 2 : 3 = 8 : 12. §. 51.

53.

Das vierte Glied einer geometrischen Proportion ist gleich dem Product der beyden mittlern Glieder

Glieder dividirt durchs erste. Es sey das erste Glied = a, das zweyte = am, das dritte = b; so ist,

das vierte Glied oder $x = \frac{am : b}{a} = bm$.

Beweis.

Weil $a : am = b : x$. ex hyp.

so ist $ax = am \cdot b$ §. 27.

F. $x = \frac{am \cdot b}{a} = bm$. II. §. 15.

54.

Weil sich aber jedes Glied zum letzten Gliede machen läßt, nach §. 28, so läßt sich auch jedes fehlende Glied nach §. 53. bestimmen.

Man kann aber auch sagen: Jedes fehlende mittlere Glied ist gleich dem Product der beyden äußern, dividirt durch das andere mittlere Glied; und jedes fehlende äußere Glied ist gleich dem Product der beyden mittlern Glieder dividirt durch das bekannte äußere Glied. So ist z. B. in der Proportion

| $a : am = b : bm$ | und von $9 : 27 = 6 : 18$. |
|---|---|
| das 1ste Gl. $= \frac{amb}{bm} = a$ | das 1te Gl. $= \frac{27 \cdot 6}{18} = 9$. |
| das 2te Gl. $= \frac{a \cdot bm}{b} = am$. | das 2te Gl. $= \frac{9 \cdot 18}{6} = 27$. |
| das 3te Gl. $= \frac{a \cdot bm}{am} = b$. | das 3te Gl. $= \frac{9 \cdot 18}{27} = 6$. |
| das 4te Gl. $= \frac{am \cdot b}{a} = bm$. | das 4te Gl. $= \frac{27 \cdot 6}{9} = 18$. |

55.

Das mittlere Glied einer continuirlichen geometrischen Proportion ist gleich der Wurzel aus dem Product der beyden äußern Glieder. Wenn daher

daher das erste Glied $=$ a, das letzte $=$ $am^2$, so ist das mittlere oder

$$x = \sqrt{a \cdot am^2} = \sqrt{a^2m^2} = am.$$

Beweis.

Weil $a : x = x : am^2$ ex hyp.

so ist $x^2 = a^2m^2$ §. 27.

F. $x = \sqrt{a^2m^2} = am.$ (II. §. 21.)

56.

Nun lassen sich folgende drey Aufgaben auflösen.

1. Zu drey gegebenen Zahlen 5, 6 und 10 die vierte geometrische Proportionalzahl zu bestimmen.
2. Zu zwey gegebenen Zahlen 3 und 9 die dritte geometrische Proportionalzahl zu bestimmen.
3. Zu zwey gegebenen Zahlen 4 und 16 die mittlere geometrische Proportionalzahl zu bestimmen.

Die erste und zweyte Aufgabe läßt sich aus §. 53, die dritte aber aus §. 55 auflösen; denn

1. Wie $5 : 6 = 10 : x$

F. $x = \frac{6 \cdot 10}{5} = 12.$ §. 53.

2. Wie $3 : 9 = 9 : x$

F. $x = \frac{9 \cdot 9}{3} = 27.$ §. 53.

3. Wie $4 : x = x : 16$

F. $x^2 = 4 \cdot 16$

F. $x = \sqrt{64} = 8.$ §. 55.

Anmerkung.

Jede Größe, die einer Wurzelgröße gleich ist, ist also allemahl media geometrice proportionalis, zwischen den beyden Factoren, worin sich die Wurzelgröße resolviren läßt. So läßt sich z. B. 64 in

folgen-

folgende Factoren, die aus ganzen Zahlen bestehen, zerfällen, nämlich in 1. 64; 2. 32; 4. 16; 8. 8; daher ist $\sqrt{64}$ oder 8 media geometrice proportionalis zwischen 1 und 64, zwischen 2 und 32; zwischen 4 und 16 und zwischen 8 und 8.

# Achtes Kapitel.

## Die Regel Detri.

1.

Das Verfahren, wie man zu drey gegebenen Zahlen eine vierte, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion steht, finden soll, wird die Regel Detri (regula de tri — bus positionibus) oder auch, wegen ihres allgemeinen Nutzens nicht nur in der Mathematik, sondern auch im gemeinen Leben, die goldene Regel genennet.

2.

Es ist begreiflich, daß sich die zu suchende Zahl zu einer von den drey gegebenen eben so verhalten müsse, als sich die beyden andern gegebenen Zahlen gegen einander verhalten. Folglich beruhet der Grund dieser Regel auf die Theorie der geometrischen Proportion.

3.

Dies Verfahren nun, vermittelst dessen man eine unbekannte vierte geometrische Proportionalzahl finden soll, besteht im allgemeinen darin: Weil sich nämlich die Regel Detri anwenden läßt, wenn zwey gleichartige Größen sich eben so verhalten, als zwey andere von derselben oder auch von einer andern Art, und wenn drey Größen von die-

sen zwey Paaren gegeben sind, die vierte aber gesucht wird, so mache man daraus zwey geometrische Verhältnisse, wovon

das eine und zwar das erste aus den zwey gleichnahmigen gegebenen,

das andere aber aus der dritten gegebenen und der vierten zu suchenden Größe, die also beyde auch gleichartig seyn müssen, besteht.

In dem ersten Verhältniß mache man die Zahl, von der etwas bekannt ist, zum Vordergliede, von der aber etwas zu wissen verlangt wird, zum Hintergliede.

Im zweyten Verhältniß bestehe das Vorderglied — also das dritte in der Ordnung — aus derjenigen Zahl, welche von dem ersten Gliede des ersten Verhältnisses bekannt ist. Das Hinterglied aber des zweyten Verhältnisses bestehe aus derjenigen Größe, welche gesucht, und welche mit ihrem Vordergliede von gleicher Art ist.

Alles dies läßt sich in diese kurze Regel zusammen fassen: den Satz, von dem man etwas wissen will, mache man zum zweyten Gliede; den, welcher mit diesem von einerley Art ist, zum ersten; der dritte gegebene Satz aber werde das dritte Glied.

Man verlangt z. B. zu wissen, wie viel Thaler man für 5 Scheffel werde zahlen müssen, wenn 1 Scheffel von derselben Sache 2 Thlr. kostet.

Der Satz, von dem ich hier etwas wissen will, sind die 5 Scheffel, diese werden also das zweyte Glied. Der 1 Scheffel aber, der also mit jenen fünf Scheffeln von einerley Art ist, wird das erste Glied, nun sind noch 2 Thlr., als der Werth von

einem

einem Scheffel, gegeben, diese werden das dritte Glied; das vierte Glied wird dann die Zahl, die gesucht wird oder die man von dem zweyten Gliede zu wissen verlangt. Nennt man diese x, so ist die ganze Proportion

1 Scheffel : 5 Scheffel = 2 Thlr. : x Thlr.

Weil nun das vierte Glied einer geometrischen Proportion gleich ist dem Product der beyden mittlern Glieder dividirt durchs erste (VII. §. 53.): so erhält man die verlangte vierte Zahl oder den zu suchenden Werth der 5 Scheffel, wenn man die beyden mittlern Glieder 5 und 2 in einander multiplicirt, und ihr Product 10 durchs erste Glied 1 dividirt.

## Anmerkung.

Diese Ordnung der Sätze ist aber nicht absolut nothwendig. Man hätte auch Waare und Preis mit einander vergleichen und schließen können: Wie sich verhält 1 Scheffel zu seinem Werth, nämlich 2 Thlr., so verhalten sich auch 5 Scheffel zu ihrem zu suchenden Werth. Diese Art zu schließen und das unbekannte Glied durch folgende Proportion

1 Scheffel : 2 Thlr. = 5 Scheffel : x Thlr.

zu bestimmen, ist im gemeinen Leben gewöhnlich, jene Art aber mehr natürlich. Weil aber das vierte Glied, wie bekannt, gefunden wird, wenn man das zweyte Glied ins dritte oder das dritte ins zweyte multiplicirt, und ihr Product durchs erste dividirt, so läuft es auf eins hinaus, ob die 2 Thlr. im dritten und die 5 Scheffel im zweyten Gliede stehn, oder ob man die Ordnung umkehrt; denn in beyden Fällen erhält man zum Product 10. In der Folge soll indessen die erste Ordnung, weil sie natürlicher ist,

behalten werden. Wem aber die andere Art zu schließen besser gefällt, der darf nur allemahl das zweyte Glied zum dritten und das dritte zum zweyten machen.

4.

Wären alle Aufgaben so einfach, daß jeder Satz, wie in dem angeführten Beyspiel, nur aus einer Benennung bestünde, so ließe sich nach dem Inhalte des vorigen §. die unbekannte Größe allemahl sehr leicht ausmitteln; allein es besteht oft einer oder zwey oder gar alle drey Sätze aus verschiedenen Einheiten oder Benennungen; dann müssen, nachdem die Glieder gehörig geordnet worden, erst noch die verschiedenen Einheiten, woraus ein Satz besteht, in eine einzige, und zwar die größern in die kleinsten verwandelt werden, ehe man die beyden mittlern Glieder in einander multiplicirt und ihr Product durchs erste dividirt. Dabey ist noch zu merken: Das gefundene vierte Glied bekommt allemahl mit dem dritten gleiche Benennung.

5.

Oft lassen sich Vortheile anbringen, und diese muß man zur Erleichterung der Arbeit und zur Abkürzung der Rechnung nicht übersehn. Ein Hauptvortheil besteht darin, daß man die großen Zahlen, woraus die einzelnen Sätze bestehn, in die möglich kleinsten Zahlen verwandele. Dies geschieht, wenn man entweder das erste und zweyte (VII. §. 32. a) oder das erste und dritte Glied (VII. §. 32. c) durch einerley Zahl dividirt. Andere Vortheile, nebst den Regeln, worauf sich die einzelnen Fälle gründen, bey welchen die Regel Detri angewandt werden kann, sollen an ihrem Ort jedesmahl angeführt wer-

den

den. Alle und jede Vortheile aber anzuführen, und Regeln dafür abzufassen, würde viel zu weitläuftig seyn. Wer indessen bey den ihm vorkommenden Exempeln sich gewöhnt nachzudenken, der wird selbst manchen Vortheil entdecken.

6.

Die Regel Detri wird eingetheilt in die gerade oder directe und umgekehrte oder inversa. Jene begreift die Fälle, wo die gleichnahmigen Glieder einer Proportion sich auf einander beziehen, so daß, wenn das zweyte Glied ein aliquoter Theil oder ein Multiplum ist vom ersten, das vierte alsdann ebenfalls auch derselbe aliquote Theil oder dasselbe Multiplum vom dritten seyn muß. Die verkehrte Regel Detri aber begreift die Rechnungsfälle, wo dies nicht ist, denn es giebt Dinge, welche in eben dem Verhältnisse abnehmen, in welchem andere mit ihnen in Beziehung stehende Dinge zunehmen, diese befinden sich dann in einem umgekehrten Verhältniß.

Jede Art ist wieder entweder einfach oder zusammengesetzt. Jene findet Statt, wenn nur drey Glieder einer Proportion gegeben sind, zu welchem man das vierte suchen soll; diese, wenn mehrere Glieder aus verschiedenen Proportionen gegeben sind, zu welchen ein oder mehrere unbekannte Glieder gesucht werden sollen. Sie heißt insbesondere Regel Quinque (regula quinque positionum), wenn fünf Glieder aus zwey verschiedenen Proportionen, und Regel Multiplex, wenn mehr, als fünf Glieder, aus verschiedenen Proportionen gegeben sind.

## I.
## Die einfache Regel Detri.

### A.
### Die gerade oder directe Regel Detri.

7.

1. Wenn das erste Glied aus 1 mit derjenigen Benennung besteht, welche auch im zweyten Gliede ganz allein vorkommt, oder wenn sich die Benennung des zweyten Gliedes in die Benennung des ersten verwandeln läßt.

Die hieher gehörigen Aufgaben pflegt man Multiplicationsexempel zu nennen, weil man nur das zweyte und dritte Glied in einander multipliciren darf, um das unbekannte vierte Glied zu finden; denn wollte man durch das erste Glied — welches in diesem Fall 1 ist — dividiren, so würde man zum Quotienten dieselbe Zahl wieder erhalten.

Sollte aber das zweyte oder dritte Glied oder beyde Glieder Brüche enthalten, so versteht sichs von selbst, daß, wenn in einem der beyden Glieder ein Bruch ist, das Product der beyden mittlern Glieder durch dessen Nenner, und wenn beyde Glieder Brüche enthalten, das Product der beyden mittlern Glieder durchs Product der beyden Nenner dividirt werden müsse.

a. Wenn das zweyte Glied die Benennung des ersten Gliedes ganz allein hat.

1. Wenn 1 Elle 3 Rthlr. kostet, wie viel kosten 5 Ellen? Man schließt:

wie 1 Elle zu 5 Ellen, so 3 Rthlr. zum Werth von fünf Ellen.

oder 1 Elle : 5 Ellen = 3 Rthlr. : viertes Glied.

$$\frac{3}{\text{15 Rthlr.}}$$

2. Was

2. Was kosten 100 Fr. d'or an Agio, da jetzt 1 Stück 12 Gr. 6 Pf. gegen Courant kostet? 52 Rthlr. 2 Gr.

1 Fr. d'or : 100 Fr. d'or = 12 Gr. 6 Pf. : 4 Gl.

12 ·

150 Pf.

100

15000 Pf.

werden in Gr. verw. durch 12) 1250 Gr.

werden in Rthl. verw. durch 24) 52 Rthlr. 2 Gr.

Oder

1 Fr. d'or : 100 Fr. d'or = 12 Gr. 6 Pf. : 4tes Glied.

(100

52 Rthlr. 2 Gr. Pf.

Denn 100 mahl 6 Pf. sind $\frac{100}{2}$ gr.

$\frac{100}{2}$ gr. = 50 gr. = 2 thlr. 2 gr.

und 100 mahl 12 Gr. sind $\frac{100}{2}$ thl. = · 50 · · ·

also zusammen 52 thlr. 2 gr.

3. Wie viel betragen 100 Stück Fr. d'or mit Agio in Courant, das Stück zu 5 Rthlr. 12 Gr. 6 Pf. gerechnet?

1 Fr. d'or : 100 Fr. d'or = 5 thl. 12 gr. 6 pf. : 4tes Glied.

24

132 Gr.

12

1590 Pf.

100

159000 Pf.

12) 13250 Gr.

24) 552 Rthlr. 2 Gr.

Oder

1 Fr.d'or : 100 Fr.d'or = 5 thl. 12 gr. 6 pf. : 4tes Glied.

(100

552 thl. 2 gr. = Pf.

Denn 100mahl 6 Pf. = $\frac{100}{2}$ Gr. = 50 Gr. = 2 thl. 2 gr.
und 100mahl 12 Gr. = $\frac{100}{2}$ thl. = . . . 50 . . .
und 100mahl 5 Rthlr. = . . . . . 500 . . .

also zusammen 552 thl. 2 gr.

b. Wenn die Benennung des zweyten Gliedes in die Benennung des ersten Gliedes muß verwandelt werden.

Das zweyte Glied muß mit dem ersten Gliede einerley Benennung haben; ist dies nicht, so verwandelt man die Benennung höherer Art in die niedrigere, welche das erste Glied hat.

4. Wenn 1 Loth 1 Rthlr. 8 Gr. 4 Pf. kostet, was werden dann 2 ℔ kosten? 86 Rthlr. 5 Gr. 4 Pf.

1 Loth : 2 ℔ = 1 thl. 8 gr. 4 pf. : 4tes unbek. Glied.

$\frac{32}{64}$ Lth. $\frac{24}{32}$ Gr.

12

388 Pf.

64

1552
2328

24832 Pf.

12) 24832 Pf.

2069 Gr. Rest 4 Pf.

24) 2069 Gr. Rest 4 Pf.

86 Rthlr. Rest 5 Gr.

Oder

Oder

1 Loth : 2 ℔ = 1 Rthl. 8 Gr. 4 Pf. : 4tes unbek. Gl.

32 | 10 • 18 • 8 = (8
64 Lth. | 86 • 5 = 4 • (8
8 . 8.

Die 2 ℔ machen 2 . 32 oder 64 Loth, diese sind resolvirt auf 8mahl 8. Dann ist 1 • 8 • 4 Pf. erst in 8, und das 8fache wieder in 8 multiplicirt, welches das 64fache giebt.

Nun sind 8mahl 4 Pf. = 32 Pf. = • • 2 • 8 Pf.
8 — 8 Gr. = 64 Gr. = • 2 • 16 • —
8 — 1 thl. = • • • • = 8 • • • —
also das 8fache = 10 • 18 • 8 Pf.

Ferner 8mahl 8 Pf. = 64 Pf. = • • 5 • 4 Pf.
8 — 18 Gr = 144 Gr. = 6 • • • • •
8 — 10 thl. = • • • = 80 • • • • •
Folgl. das 8mahl 8 oder 64fache = 86 • 5 • 4 Pf.

8.

2. Wenn das zweyte oder dritte Glied 1 ist.

Hier darf man nur dasjenige von diesen beyden Gliedern, welches mehrere Einheiten hat, durch das erste und zweyte Glied dividiren. Und sind im ersten und zweyten oder im ersten und dritten Gliede Einheiten von verschiedener Ordnung vorhanden, so werden diese im ersten Gliede allemahl unter einerley Ordnung gebracht; in Ansehung des zweyten und dritten Gliedes aber ist dies nicht allemahl nöthig.

5. Was kostet 1 Schock, wenn 12 Schock für 66 Rthlr. gekauft werden? 5 Rthlr. 12 Gr.

12 Schock : 1 Schock = 66 Rthl. : 4tes Glied.

12) ———

5 6/12 thl. = 5 thl. 12 gr.

R 5 6. 25

6) 25 Winspel 12 Scheffel sind bezahlt mit 873 Rthl. 6 Gr., was macht das auf den Scheffel? 1 Rthl. 10 Gr. $2\frac{16}{17}$ Pf.

25 Wspl. 12 Schfl. : 1 Schfl. = 873 thl. 6 gr. : 48 Gl.

24

612 Schfl.

24

10 gr.

612 : 24958 Gr | 34 gr. | 1 thl.
2590 | 24
15
12

36

612 : 1800 Pf | $2\frac{576}{612}$ | $\frac{1}{1}\frac{6}{7}$ pf.
576

Oder

25 Wspl. 12 Schfl. : 1 Schfl. = 873 thl. 6 gr. : 48 Gl.

24

612 Schfl.

873
612 : 873 | 1 Rthlr.
261

24

612 : 6270 | 10 Gr.
15

12

36

1800 | $2\frac{576}{612}$ | $\frac{1}{1}\frac{6}{7}$ Pf.
576

Oder

25 Wspl. 12 Schfl. : 1 Schfl. = 873 thl. 6 gr. : 48 Gl.

24

612 Schfl.

9) 873

4) 97 • • 8 pf.

9) 68

4) 17

17) 24 • 6 • 2 •

1 • 10 • $2\frac{16}{17}$ pf.

## Anmerkung.

Das erste Glied ist in 612 Scheffel verwandelt. Dann sind bey der ersten Berechnung auch die 873 thlr.

873 rthlr. 6 gr. in 20958 gr. verwandelt worden. Dividirt man diese durch 612, so kommen 34 gr. d. i. 1 rthlr. 10 gr. heraus. Weil aber noch 150 gr. übrig geblieben, die auch durch 612 dividirt werden sollen; 150 gr. aber als Groschen sich durch 612 nicht dividiren lassen, so sind die übrig gebliebenen 150 gr. durch 12 in 1800 pf. verwandelt, und diese durch 612 dividirt worden, da denn noch $2\frac{576}{612}$ pf. heraus kommen. Der Bruch $\frac{576}{612}$ läßt sich durch 36 heben. Es kostet also 1 Scheffel 1 rthlr. 10 gr. $2\frac{16}{17}$ pf.

Bey der zweyten Berechnung sind gleich 873 rthl. durch 612 dividirt worden. Der Quotient ist 1 rthl. Der Rest aber 261 rthlr. ist durch 24 in Groschen verwandelt, und die schon vorhandenen 6 gr. sind dazu genommen, daß also 6270 gr. durch 612 dividirt werden müssen. Der Quotient ist 10 gr. Die übrig gebliebenen 150 gr. sind durch 12 in 1800 pf. verwandelt und durch 612 dividirt worden, da dann wieder $2\frac{16}{17}$ pf. heraus kommen.

Bey der dritten Berechnungsart ist das erste Glied zerfällt auf 9.4.17; vom letzten Satz ist daher zuerst der neunte Theil genommen, dieser ist 97 rthlr. — gr. 8 pf. Dieser neunte Theil ist wieder durch 4 dividirt, wodurch man den Quotienten 24 rthlr. 6 gr. 2 pf. erhalten hat, dieser 36ste Theil ist endlich noch durch 17 dividirt worden, daher ist der 612te Theil 1 rthlr. 10 gr. $2\frac{16}{17}$ pf.

7. Es hat jemand jährlich 992 rthlr. 8 gr. zu verzehren, wie viel kommt davon auf jede Woche?
19 rthlr. 2 gr.

52 Wochen

4) 52 Woche : 1 Woche = 992 thl. 8 gr. : 4s unbek. Gl.
13 4)

248 • 2 •
13)

19 • 2 gr.

8. Wenn der Centner von einer gewissen Waare für 22 rthlr. 12 gr. behandelt worden ist, wie viel wird man für 100 rthlr bekommen? 4 Centner 48 ℔ 28 4/9 Loth.

22 thl. 12 gr. : 100 thl. = 1 Ctr. : 4tes unbek. Gl.

24 / 540 gr. / 54 / 6) 9

24 / 2400 gr. / 240 / 6) 9) 40 | 4 Centner. / 4 / 110 / 9) 440 | 48 ℔ / 88 / 32 / 9) 256 | 28 4/9 Loth. / 74

Die 22 rthl. 12 gr. sind in 540 und die 100 rthl. in 2400 gr. resolvirt worden. Dann sind die beyden vordern Glieder erst durch 10, dann durch 6 gekleinert worden, dadurch hat man vorne zum Divisor 9, in der Mitte zum Dividendus 40 bekommen. Dividirt man nun 40 Centner durch 9, so ist der Quotient 4 Centner. Die übrig gebliebenen 4 Centner sind in Pfunde durch 110 resolvirt, und 110 ℔ durch 9 dividirt worden; der Quotient ist 48 ℔; die übrig gebliebenen 8 ℔ sind durch 32 in Lothe resolvirt und die dadurch erhaltenen 256 Loth durch

9 divi-

9 dividirt worden, da denn zum Quotienten 28 4/9 Loth kommen.

## Anmerkung.

Die Rechnungsfälle der Regel-Detri, die im zweyten oder dritten Gliede 1 haben, pflegt man Divisionsexempel zu nennen, so wie jene §. 7. Multiplicationsexempel, und dagegen ist auch weiter nichts zu erinnern, als daß man nur nicht glauben müsse, als wären diese Exempel nicht auch Proportionsexempel, wie diejenigen, wo in allen Gliedern mehrere Einheiten vorkommen. Uebrigens sind jene sogenannte Multiplications- und diese Divisionsexempel im gemeinen Leben am gewöhnlichsten; denn gemeiniglich will man wissen, wie viel für Eine ganze Parthie Waare werde gezahlt werden müssen, wenn die Einheit davon für einen bestimmten Preis behandelt worden ist; oder wenn man eine ganze Parthie zusammen für eine gewisse Summe gekauft hat, so will man wissen, wie viel davon auf eine bestimmte einzelne Größe kommen werde. Seltner sind die folgenden Rechnungsfälle, der Regel Detri, wo in allen drey Gliedern Einheiten von verschiedener Ordnung vorkommen.

9.

3. Wenn in jedem der drey gegebenen Glieder mehrere Einheiten einer oder auch verschiedener Ordnungen vorkommen, und also die Einheiten der höhern Ordnung in Einheiten der niedrigsten Ordnung resolvirt werden müssen.

9. Es bedingt jemand 8 Metzen Erbsen für 23 Gr., wie viel wird er für 4 Scheffel zahlen müssen?
7 Thlr. 16 Gr.

8 Mtzn.

8 Mtzn. : 4 Schfl. = 23 Gr. : viertes unbekanntes Gl.

16

64 Mtzn. 1 thlr. — 1 gr. (8

8) 64 8 thlr. — 8 gr. d. i. 7 thl. 16 gr.

8

Die 4 Scheffel sind durch 16 in 64 Metzen resolvirt. An Statt 23 Gr. ist 1 Thlr. weniger 1 Gr. gesetzt. Dann sind 64 durch 8 dividirt, und 1 Thlr. — 1 Gr. 8mahl genommen, das macht 8 Thlr. — 8 Gr. d. i. 7 Thlr. 16 Gr.

10. Es hat jemand 1 Mandel 9 Stück mit 16 Gr. 8 Pf. bedungen, wie viel muß er für 28 Schock 3 Mandel 3 Stück bezahlen?

1 M. 9 St. : 28 Schck. 3 M. 3 St. = 16 gr. 8 pf. : 4tes Gl.

15 4

24 St. 115 Mdl (3

15 2th. 2gr. —

1728 St. 50th. — gr. — pf. (24

24) 1728

72

3. 24.

Hier ist 1 Mandel 9 Schock in 24 Stück und 28 Schock 3 Mandel 3 Stück in 1728 Stück resolvirt, dann das mittlere Glied 1728 durch das vordere 24 dividirt, giebt den Quotienten 72. Diese 72 sind nun resolvirt in die beyden Factores 3. 4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nun sind 3 . 8 pf. = | 2 gr. | ferner 24 . 2 gr. = . . | 2 thl. |
| und 3 . 16 gr. = | 2 thl. — | und 24 . 2 thl. = — | 48 thl. |
| also 3mahl 16 gr. 8 pf. = | 2th 2gr. | also 24 . 2thl. 2 gr. = | 50 thl. |

10.

Kommen in einem Exempel der Regel Detri zugleich Brüche vor, so stehen diese entweder ganz allein, oder sie sind ganzen Zahlen angehängt.

1. Wenn

1. Wenn die Brüche nicht mit ganzen Zahlen verbunden sind.

Man multiplicirt den Zähler des dritten und zweyten und den Nenner des ersten Gliedes in einander; desgleichen den Nenner des dritten und zweyten und den Zähler des ersten Gliedes. Dividirt dann das erste Product durch das letzte, so ist die Aufgabe aufgelöset. Man kann daher alle solche Bruchexempel unter folgende Form bringen.

1) $\frac{2}{3}$ ℔ kosten $\frac{8}{9}$ Thlr., was werden $\frac{5}{6}$ ℔ kosten?
$1\frac{1}{9}$ Thlr.

$\frac{2}{3}$ ℔ : $\frac{5}{6}$ ℔ = $\frac{8}{9}$ Thlr. : viertes unbekanntes Glied

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$ Thlr.

Weil man nun jede Zahl in einen Bruch verwandeln kann, dessen Nenner 1 ist, so kann man auch jedes Exempel, obgleich nicht in jedem Gliede ein Bruch vorkommt, in eben diese Form bringen.

2) 2 Schock kosten $\frac{5}{6}$ Thlr., was werden $\frac{2}{3}$ Schock kosten? 6 G. 8 Pf.

Schock Schock Thlr.

2 : $\frac{2}{3}$ = $\frac{5}{6}$ : viertes unbekanntes Glied.

$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{5}{18}$ thlr. $= \frac{5 \cdot 24}{18}$ gr. $=$
$\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ gr. $=$ 6 gr. 8 pf.

3) $\frac{2}{3}$ Ellen kosten $\frac{5}{18}$ Thaler, was werden 10 Ellen kosten? 12 Thlr. 12 Gr.

Ellen Ellen Thlr.

$\frac{2}{3}$ : 10 = $\frac{15}{18}$ : viertes Glied.

$\frac{2}{3} \times \frac{10}{1} = \frac{15}{18} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 15}{2 \cdot 1 \cdot 18} = \frac{75}{6}$ thlr. $=$ 12 thlr.
12 gr.

4) $\frac{3}{3}$ Schock

4) $\frac{2}{3}$ Schock kosten 8 Gr., was werden $\frac{5}{6}$ Schock kosten? 10 Gr.

$\frac{2}{3}$ Schock : $\frac{5}{6}$ Schock = 8 gr. : viertes unbek. Glied.

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 1} = 10$ gr.

5) $\frac{2}{3}$ Schock kosten 8 Gr., was werden 100 Schock kosten? 50 Thlr.

$\frac{2}{3}$ Schock : 100 Schock = 8 gr. : 4tes unbek. Glied.

$\frac{2}{3} \times \frac{100}{1} = \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 8}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 1200$ gr.

$= 50$ thlr.

6) 3 Schock kosten $\frac{7}{8}$ Thlr., was werden 100 Schock kosten? 29 Thlr. 4 Gr.

3 Schock : 100 Schock = $\frac{7}{8}$ thlr. : 4tes unbek. Gl.

$\frac{3}{1} \times \frac{100}{1} = \frac{7}{8} = \frac{100 \cdot 7}{3 \cdot 8} = \frac{700}{24} =$

$29\frac{1}{6}$ thlr.

7) 3 ℔ kosten 4 Thlr., was werden $\frac{7}{8}$ ℔ kosten? 1 Thlr. 4 Gr.

3 ℔ : $\frac{7}{8}$ ℔ = 4 thlr : viertes unbekanntes Glied.

$\frac{3}{1} \times \frac{7}{8} = \frac{4}{1} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 8} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ thl. = 1 thl. 4 gr.

11.

**2. Wenn die Brüche ganzen Zahlen angehängt sind.**

Man richtet die vermischte Zahl ein (III. §. 57.), und bringt dadurch das Exempel in die Form des vorigen §.

8) Was werden 28 Ellen kosten, wenn 1 Elle mit $3\frac{1}{2}$ Thlr. bedungen worden? 98 Thlr.

1 Elle : 28 Ellen = $3\frac{1}{2}$ thlr. : 4tes unbek. Glied.

$\frac{1}{1} \times \frac{28}{1} = \frac{7}{2} = \frac{28 \cdot 7}{2} = 98$ thlr.

Oder

Oder

Elle Elle Thlr.
1 : 28 = $3\frac{1}{2}$ : viertes unbek. Glied.

4.7 — (4
14
— (7
98 Thlr.

Oder

Elle Elle Thlr.
1 : 28 = $3\frac{1}{2}$ : viertes unbek. Gl.
— (3
84 das Dreyfache
2) 14 die Hälfte vom 1fachen
98 thlr. das $3\frac{1}{2}$fache.

Es ist also hier 28 — 3mahl genommen, macht 84 thl. und dazu noch die Hälfte von 28 gethan, d. i. 14
also zusammen 98 thlr.

9) Wenn 1 Scheffel $1\frac{2}{3}$ Thlr. kostet, wie viel muß man dann für $9\frac{1}{2}$ Scheffel zahlen? 15 Thl. 20 Gr.
1 Schfl. : $9\frac{1}{2}$ Schfl. = $1\frac{2}{3}$ thlr. : 4tes unbek. Glied.

$\frac{1}{1}$ × $\frac{19}{2}$ = $\frac{5}{3}$ = $\frac{19.5}{2.3}$ = $\frac{95}{6}$ = $15\frac{5}{6}$ thl.
= 15 thlr. 20 Gr.

Oder

1 Schfl. : $9\frac{1}{2}$ Schfl. = $1\frac{2}{3}$ thlr. : 4tes unbek. Glied.
— (9
15.
2) — $\frac{5}{6}$
$15\frac{5}{6}$ thlr.

10) $8\frac{1}{4}$ Wispel sind mit $247\frac{1}{2}$ Thlr. bezahlt worden, wie viel macht das auf den Wispel? 30 Thlr.
$8\frac{1}{4}$ Wpl. : 1 Wpl. = $247\frac{1}{2}$ thlr. : viertes unbek. Gl.

$\frac{33}{4}$ × $\frac{1}{1}$ = $\frac{495}{2}$ = $\frac{4.495}{33.2}$ = 2.15 = 30 thl.

12.

Nun ists auch leicht, solche Exempel zu berechnen, wo ein und das andere oder alle drey Glieder aus mehreren verschiedenen Benennungen bestehen. Man verwandelt nämlich die verschiedenen Benennungen in eine, richtet dann die Brüche ein (III. §. 57.) und bringt auf die Art das Exempel in die vorige Form.

11) Wenn der Schatten eines 4 Fuß 8 Zoll langen Stabes zu einer gewissen Tageszeit 3 Fuß $8\frac{4}{5}$ Zoll beträgt, wie hoch muß der Thurm seyn, der zu derselben Jahres- und Tagszeit einen Schatten von 25 Ruthen 8 Fuß $4\frac{4}{5}$ Zoll wirft? 20 Ruthen 6 Fuß $8\frac{16}{25}$ Zoll.

Fuß Z. Schatt. Ruthen F. Z. Schatten F. Z. Höhe

$4 \cdot 8 : 25 \cdot 8 \cdot 4\frac{4}{5} = 3 \cdot 8\frac{4}{5}$ : 4tes unbek. Gl.

12 | 12 | 12

56 Z. | 308 F. | $44\frac{4}{5}$ Z.

12 | $\frac{224}{5}$ Z.

$3700\frac{4}{5}$ Z.

$\frac{18504}{5}$ Z.

Man hat also $\frac{5}{1} : \frac{18504}{5} = \frac{224}{5} : \frac{18504 \cdot 224}{56 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{74016}{25}$ Zoll

$= 20$ R. 6 F. $8\frac{16}{25}$ Z.

12) 1 Centner $63\frac{1}{4}$ tb sind mit 568 Thlr. 11 Gr. $5\frac{1}{4}$ Pf. bezahlt, wie viel kommt davon das Pfund? 3 Thlr. 6 Gr. 9 Pf.

1 Ct. $63\frac{1}{4}$ tb : 1 tb = 568 thl. 11 gr. $5\frac{1}{4}$ pf. : 4tes unb. Gl.

110 | 24

$173\frac{1}{4}$ tb | 13643 gr.

$\frac{693}{4}$ tb | 12

$163721\frac{1}{4}$ pf.

$\frac{654885}{4}$ pf.

Das

Das Exempel heißt nunmehr so:

$\frac{693}{4}$ ℔ : 1 ℔ = $\frac{654885}{4}$ : viertes unbek. Glied.

$\frac{694}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{654885}{4} = \frac{4 \cdot 654885}{693 \cdot 4} = 945$ pf. =

3 thlr. 6 gr. 9 pf.

Oder

1 Ct. $63\frac{1}{4}$ ℔ : 1 ℔ = 568 thl. 11 gr. $5\frac{1}{4}$ pf. : 4tes unb. Gl.

$\frac{693}{4}$ ℔ (4

7) 2273 · 21 · 9

9) 324 · 20 · 3 ·

11) 36 · 2 · 3 ·

3 · 6 = 9 Pf.

$\overbrace{7 \cdot 9 \cdot 11.}^{4}$

## Anmerkung.

1. Das erste Glied ist verwandelt in $\frac{693}{4}$ ℔. Multiplicirt man nun das erste und dritte Glied in den Nenner 4, so fallen die Brüche weg, ohne daß die Proportion aufgehoben wird, nach VII. §. 37. Dadurch wird das Exempel in folgendes verwandelt: 693 ℔ : 1 ℔ = 2273 thlr. 21 Gr. 9 Pf. das vordere Glied 693 ist dann resolvirt in 7. 9. 11, und das dritte Glied nach und nach durch 7, 9 und 11 dividirt worden.

2. Aus der ersten Berechnung dieses Exempels erhellet, daß, wenn der Nenner des ersten Gliedes gleich ist dem Nenner des dritten Gliedes, die Multiplication des Products aus den beyden letzten Gliedern in den Nenner des ersten Gliedes, und die Multiplication des ersten Gliedes in den Nenner des letzten Gliedes nicht nöthig ist. Eben dies gilt auch, wenn der Nenner des ersten Gliedes gleich dem Nen-

ner des zweyten, desgleichen wenn der Nenner des ersten Gliedes gleich ist dem Product der Nenner des zweyten und dritten Gliedes.

13.

Die Probe eines Exempels der Regel Detri kann auf folgende sechsfache Art angestellt werden. Denn wenn man recht gerechnet hat, so muß

1. das Product aus dem gefundenen vierten Gliede ins erste gleich seyn dem Product aus dem zweyten Gliede ins dritte.
2. Der Quotient aus dem gefundenen vierten Gliede dividirt durchs dritte muß gleich seyn dem Quotienten aus dem zweyten Gliede dividirt durchs erste.
3. Der Quotient aus dem gefundenen vierten Gliede dividirt durchs zweyte muß gleich seyn dem Quotienten aus dem dritten Gliede dividirt durchs erste.
4. Das Product aus dem gefundenen vierten Gliede ins erste, dividirt durchs dritte muß gleich seyn dem zweyten Gliede.
5. Das Product aus dem gefundenen vierten Gliede ins erste, dividirt durchs zweyte gleich dem dritten Gliede.
6. Das Product aus dem zweyten Gliede ins dritte, dividirt durch das gefundene vierte Glied, gleich dem ersten Gliede. Die Gründe hievon enthält die Lehre von den geometrischen Proportionen.

Man habe z. B. durch die Rechnung gefunden, daß, wenn 4 ℔ $2\frac{1}{2}$ Thlr. kosten, alsdann 12 ℔ mit $7\frac{1}{2}$ Thlr. bezahlt werden müssen.

Will man nun wissen, ob man recht gerechnet habe, so muß seyn

1. $4 . 7\frac{1}{2} = 12 . 2\frac{1}{2}$ . Beydes ist = 30.
2. $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = 12 : 4$ . Beydes ist = 3.
3. $7\frac{1}{2} : 12 = 2\frac{1}{2} : 4$ . Beydes ist = $\frac{5}{8}$.
4. $\frac{7\frac{1}{2} \cdot 4}{2\frac{1}{2}} = 12$ = dem zweyten Gliede.
5. $\frac{7\frac{1}{2} \cdot 4}{12} = 2\frac{1}{2}$ = dem dritten Gliede.
6. $\frac{12 \cdot 2\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}} = 4$ = dem ersten Gliede.

## B.

## Die umgekehrte Regel Detri.

### 14.

Was es mit dieser so genannten umgekehrten Regel Detri für eine Bewandniß habe, läßt sich am besten an einem besondern Exempel zeigen.

100 Mann haben bey möglichst genauer Eintheilung der Portionen noch auf 20 Tage Vorrath an Lebensmitteln; da nun gleich nach gemachtem Ueberschlage noch 100 Mann hinzukommen, so fragt sichs, wie lange diese 200 Mann mit demselben Vorrath ausreichen können?

Wollte man nun hier so schließen:

Wie 100 M. : 200 M = 20 T. : $\frac{200 \cdot 20}{100}$ = 40 Tage;

so lehrt ein ganz geringes Nachdenken, daß die gefundene vierte Proportionalzahl, nemlich 4 Tage, unmöglich richtig seyn könne. Denn da 200 Mann unter der angenommenen Bedingung, daß die Portionen nicht kleiner gemacht werden können, an einem Tage gerade noch einmahl so viel verzehren, als 100 Mann, so ists ja nicht einmahl möglich,

daß sie 20 Tage damit auskommen können, viel weniger also 40 Tage.

Hätte man aber so geschlossen:

Wie 200 M.: 100 M. = 20 T.: $\frac{100 . 20}{200}$ = 10 Tage;

so wäre mit den gefundenen 10 Tagen die Frage richtig beantwortet worden; denn nun erhalten die 200 Mann in 10 Tagen eben so wohl 2000 Portionen zusammen, als 100 in 20 Tagen. Der ganze Vorrath aber bestand unter der angenommenen Bedingung nur aus 2000 Portionen.

15.

Wodurch unterscheidet sich nun der letzte Aufsatz vom ersten? Beym letzten Aufsatz schloß man so: Die doppelte Anzahl Menschen kann nur halb so lange mit dem Vorrath auskommen, als die einfache Anzahl. Es stehen also die Tage im umgekehrten Verhältniß der Mannschaft, oder die Mannschaft im umgekehrten Verhältniß der Zeit. Denn je mehr Menschen von einem gewissen Vorrath zehren, desto kürzer dauert derselbe Vorrath.

16.

Nun aber entsteht die neue Frage: Woran erkennt man, ob zwey Dinge mit zwey andern, worauf jene Beziehung haben, im geraden oder umgekehrten Verhältniß stehen, und ob also ein Rechnungsfall nach der geraden oder umgekehrten Regel Detri aufgelöset werden müsse?

Hat man den Aufsatz, wie gewöhnlich, gemacht, nämlich

100 M.: 200 M. = 20 Tage: viertes Gl. — +

so frage man

1. Muß

1. Muß mehr oder weniger herauskommen, als die Zahl des dritten Gliedes. Findet man, daß weniger herauskommen muß, so bemerke man es an der Seite mit dem Zeichen Minus (—); muß aber mehr herauskommen, mit dem Zeichen Plus (+).
2. Vergleiche man das zweyte Glied mit dem ersten. Ist das zweyte Glied größer als das erste, so bemerke man es gleichfalls an der Seite mit Plus; ist es aber kleiner, mit dem Zeichen Minus.

Nun sind entweder die beyden Zeichen gleich, d. i. beyde entweder Minus oder beyde Plus; oder sie sind verschieden. Ist das erste, so wird das Exempel nach der geraden Regel Detri berechnet, sind aber die Zeichen verschieden, so gehört der Fall zur umgekehrten Regel Detri. Z. B.

8 ℔ : 16 ℔ = 12 thlr. : viertes Gl. + +

Hier muß mehr heraus kommen, als 12 thlr., weil noch einmahl so viel Waare auch doppelt so viel Geld kostet, also +; das zweyte Glied 16 ist aber auch größer, als das erste 8, also auch +. Da nun die Zeichen einerley sind, so muß man damit nach der directen Regel Detri verfahren, und es ist also das vierte Glied $= \frac{16 . 12}{8} =$ 24 Thlr.

Oder 8 ℔ : 4 ℔ = 12 thlr. : viertes Glied. — —

Hier muß offenbar aus dem angeführten Grunde weniger herauskommen, als die Zahl des dritten Gliedes, also —; das zweyte Glied 4 ist aber auch kleiner, als das erste 8, mithin auch —. Da nun die Zeichen hier wieder einerley sind, so gehört auch dies Exempel zur geraden Regel Detri, und es ist daher das vierte Glied $= \frac{4 . 12}{8} =$ 6 thlr.

Allein bey unserm Exempel § 14, nämlich 100 M. : 200 M. = 20 T. : viertes Glied. — +. verhält sich die Sache anders. Offenbar muß hier weniger herauskommen, als das dritte Glied, man bemerke es also mit —. Das zweyte Glied 200 aber ist grösser, als das erste 100, also +. Da nun hier die Zeichen verschieden sind, so läßt sich dieser Fall nicht nach der ordentlichen Regel Detri berechnen, er gehört vielmehr zur umgekehrten Regel.

17.

Hat man nun nach angestellter Untersuchung gefunden, daß der vorhandene Rechnungsfall sich nicht nach der ordentlichen Regel Detri auflösen lasse, so entsteht endlich die Frage: Wie berechnet man ein solches Exempel?

Entweder läßt man den Aufsatz so wie er schon da steht, und dann multiplicirt man das erste und dritte Glied, das heißt, die beyden gegebenen Glieder, welche eine Beziehung auf einander haben, in einander und dividirt ihr Product durch das zweyte Glied, auf welches das verlangte vierte Glied Beziehung hat.

Oder man kehrt die beyden ersten Glieder um, indem man das erste Glied in die zweyte, das zweyte Glied aber in die erste Stelle bringt, und dann dividirt man das Product aus dem zweyten ins dritte Glied durchs erste.

Anmerkung.

Diese Versetzung der beyden ersten Glieder hat den Nutzen, daß man alsdann den Auf[illegible] behandeln kann, als gehörte er unter die ord[illegible]e Regel Detri; weil nun die Exempel der letzten [illegible] iusiger vor-

vorkommen, als Exempel der umgekehrten Regel, so ist man alsdann nicht so leicht in Gefahr sich zu irren, besonders wenn die Glieder Brüche enthalten. Auch kann man sich in Ansehung der zu machenden Probe alsdann ganz nach den Regeln richten, die oben §. 13. zur Prüfung der Richtigkeit der Rechnung eines Exempels der ordentlichen Regel Detri gegeben sind.

1. Aus einem Wasserbehälter, in welchem das Wasser immer gleich hoch steht, ergießen sich 8 Röhren von gleicher Weite, und füllen zusammen einen Teich in 2 Tagen $12\frac{2}{3}$ Stunden. Wie viel Zeit wird erfordert werden, denselben Teich zu füllen, wenn nur 6 von diesen Röhren laufen sollen oder können? 3 T. $8\frac{8}{9}$ St.

8 Röhren : 6 Röhren = 2 T. $12\frac{2}{3}$ St. : viertes Gl. + —

6 : 8 = 2 T. $12\frac{2}{3}$ St.

24

$60\frac{2}{3}$ St.

$1\frac{8}{3}\frac{2}{=}$ St.

Also $\frac{6}{1} \times \frac{8}{1} = \frac{182}{3} = \frac{8 \cdot 182}{6 \cdot 3} = \frac{1456}{18} = 80\frac{16}{18}$ Stunden

$= 3$ T. $8\frac{8}{9}$ St.

Oder

6 R. : 8 R. = 2 T. $12\frac{2}{3}$ St. : viertes Glied.

2) 6 — 2) 8 — (4

3 4

3) 10 . $2\frac{2}{3}$ .

3 . $8\frac{8}{9}$ Stunden.

Probe

6 R. : 8 R. = 2 T. $12\frac{2}{3}$ St. : 3 T. $8\frac{8}{9}$ St.

$6 \times 3$ T $8\frac{8}{9}$ St $= 8 \times 2$ T $12\frac{2}{3}$ St.

d. i. 20 T. $5\frac{1}{3}$ St. = 20 T. $5\frac{1}{3}$ St.

### Anmerkung.

Soll dieser Fall durch die gemeine Rechenkunst aufgelöset werden, so muß nothwendig die angeführte Bedingung Statt finden, daß nemlich der Wasserschatz, woraus sich die Röhren ergießen, immer dieselbe Höhe behalte, weil mit abnehmender Höhe auch die Geschwindigkeit, womit das Wasser durch die Röhren läuft, abnimmt. Noch weniger gehört der Fall für die gemeine Arithmetik, den man sogar noch in neuern übrigens brauchbaren Rechenbüchern unter die Rechnungsfälle der verkehrten Regel Detri aufgeführt findet, und so lautet: Ein Teich, der verschiedene Thüren oder Schütze von gleicher Oeffnung hat, läuft in 9 Stunden ab, wenn man 10 Thüren öffnet; in wie viel Stunden wird er ablaufen, wenn man nur 9 Thüren öffnet? Da hier sogar die ausdrückliche Bedingung ist, daß der Teich ablaufen soll, so nimmt mit jedem Augenblick die Tiefe des Wassers, und mit derselben zugleich auch der Druck der obern Wassertheile auf die untern ab, und das Wasser läuft also in jedem folgenden Zeitraum langsamer, als im vorhergehenden; mithin ist die Geschwindigkeit nicht gleichförmig.

2. Es braucht jemand bey $\frac{6}{4}$ Breite $5\frac{1}{4}$ Elle Tuch zu einem Kleide, wie viel wird er brauchen, wenn das Tuch nur $\frac{2}{8}$ breit ist? 7 Ellen.

$\frac{6}{4}$ Ell. br. : $\frac{2}{8}$ Ell. br. = $5\frac{1}{4}$ E. l. : viertes Glied. + —

$\frac{2}{8} \times \frac{6}{4} = \frac{21}{4} = \frac{8.6.21}{9.4.4} = 7$ Ellen lang.

3. Ein belagerter Ort ist für die Besatzung von 3000 Mann nur auf vier Wochen mit Lebensmitteln versehen, da man aber erst in 6 Wochen auf Entsatz rechnen kann, und man überdem eine

so

so starke Besatzung nicht nothwendig braucht, so fragt sichs, wie viel von der Besatzung man nur werde behalten dürfen, damit der Vorrath für sie auf 6 Wochen reiche?

4 W. : 6 W. = 3000 M. : viertes Glied. — +

6 W. : 4 W. = 3000 M. : $\frac{4 \cdot 3000}{6}$ = 2000 Mann.

## II.

## Die zusammengesetzte Regel Detri.

### 18.

Muß man die Regel Detri bey einem Rechnungsfall öfter, als einmahl anwenden, so nennt man dies die zusammen gesetzte Regel Detri. Weil nun bey allen den hieher gehörigen Rechnungsfällen das Verhältniß der gegebenen Zahl zu der zu suchenden gleichartigen aus mehr als einem Verhältniß zusammengesetzt ist, jedes Verhältniß aber aus zwey Gliedern besteht, so muß allemahl eine ungerade Anzahl Glieder gegeben seyn; und nach dieser gegebenen Gliederzahl heißt nun diese zusammen gesetzte Regel Detri die Regel Quinque, wenn aus fünf gegebenen Gliedern das sechste; die Regel Septem, wenn aus sieben gegebenen Gliedern das achte, u. s. w. gefunden werden soll. Man theilt aber doch gewöhnlich die zusammengesetzte Regel Detri bloß ein in die Regel Quinque, wenn fünf, und in die Regel Multiplex, wenn mehr als fünf Glieder in ungerader Anzahl gegeben sind.

## A.

## Die Regel Quinque.

### 19.

Zur Regel Quinque gehören alle Rechnungsfälle, wo das Verhältniß der einen gegebenen Zahl

zur

zur zu suchenden gleichartigen Zahl aus zwey Verhältnissen zusammen gesetzt ist.

20.

Man kann aber die hieher gehörigen Exempel auf eine doppelte Art berechnen, entweder

1. durch zweymahlige Wiederholung der einfachen Regel Detri; dann werden
   a. von den fünf gegebenen Gliedern drey, welche zusammen gehören, in eine Proportion gebracht und dazu das vierte gesucht.
   b. Wird aus diesem gefundenen vierten Gliede und den noch übrigen beyden gegebenen Gliedern eine neue Proportion gemacht, und dazu wieder das vierte Glied gesucht, welches dann die Zahl ist, die man verlangt. Oder

2. Man bringt die gegebenen fünf Glieder in einen einzigen Aufsatz, so daß man die beyden gegebenen Verhältnisse, wodurch das Verhältniß der zu suchenden Zahl zu der gegebenen gleichnahmigen ausgedruckt wird, unter einander setzt; dann 1) das Product aus dem ersten Gliede des ersten Verhältnisses ins erste Glied des zweyten Verhältnisses; 2) das Product des zweyten Gliedes der beyden Verhältnisse, und 3) das gegebene fünfte Glied in eine Proportion bringt und dazu auf gewöhnliche Art die vierte Proportionalzahl sucht, welche dann die verlangte sechste Zahl ist.

21.

Weil aber das Verhältniß derjenigen Zahl, welche mit der zu suchenden einerley Benennung hat oder einerley Art ist, aus den Verhältnissen der

übri-

übrigen Zahlen nicht allemahl in einerley Ordnung zusammen gesetzt ist, so theilt sich die Regel Quinque ebenfalls wieder in die gerade und umgekehrte Regel Quinque.

## 22.

1. Die directe Regel Quinque.

1) Wie viel wird man für 60 Ctr. 20 Meilen weit zu fahren geben müssen, wenn die Fracht auf die Meile für 2 Ctr. mit 3 gr. bedungen worden? 75 rthlr.

a. Nach der ersten Art durch wiederholte Anwendung der einfachen Regel Detri.

Man nimmt erstlich nicht Rücksicht auf die Verschiedenheit der Meilen, sondern schließt:

2 Ctr. : 60 Ctr. = 3 gr. : $\frac{3 \cdot 60}{2}$ = 90 gr.

Dann bringt man die gefundenen 90 gr. mit den gegebenen Meilen in Proportion, und schließt:

1 M. : 20 M. = 90 gr. : $\frac{20 \cdot 90}{1}$ = 1800 gr. = 75 thl.

b. Nach der andern Art in einem Aufsatz.

2 Ctr. : 60 Ctr.
1 M. : 10. 20 M. = 3 gr. : sechstes Glied.

600
3)
1800 gr.
24)
75 rthlr.

2) Wie hoch belaufen sich die Zinsen in 5 Jahren von 20000 rthlr. Capital, welches zu $3\frac{1}{2}$ p. C. jährlich ausgethan worden? 3500 rthlr.

a. Auf die erste Art.

Entweder 100 thl. : 20000 thl. = $3\frac{1}{2}$ thl. Z. : 700 thl. Z.
1 Jahr : 5 J. = 700 thl. Z. : 3500 thl. Z.

Oder

Oder 1 Jahr : 5 Jahr = $3\frac{1}{2}$ thl. Z. : $17\frac{1}{2}$ thl. Z.
100 thl. : 20000 thl. = $17\frac{1}{2}$ thl. : 3500 thl. Z.

b. Auf die andere Art.

1øø rthlr. : 200øø rthlr.
1 Jahr : 5 J. = $3\frac{1}{2}$ thl. : 6tes Gl.

1000
3) $\frac{1}{2}$
3000
500
3500 rthlr. Zinsen.

3) 12 Arbeiter können in $5\frac{1}{2}$ Tag einen Graben von $82\frac{1}{2}$ Ruthe Länge heben, wie viel werden 8 Arbeiter in 10 Tagen vollenden? 100 Ruthen.

a. Auf die erste Art.

12 Arb. : 8 Arb. = $82\frac{1}{2}$ Ruthe : 55 Ruthen.
$5\frac{1}{2}$ Tag : 10 Tage = 55 R. : 100 Ruthen.

b. Auf die andere Art.

3. xz A. : 2 8 Arb. = $82\frac{1}{2}$ Ruthe : 6tes Glied.

11. $5\frac{1}{2}$ T. : 10 T.
33 20.

1650 (20
3300 (2
33) 3300
100 Ruthen.

Anmerkung.

Es sind hier, wie im vorigen, die verschiedenen Glieder der Verhältnisse gegen einander aufgehoben, wodurch die Zahlen gekleinert und eben dadurch bequemer gemacht worden.

23.

2. Die umgekehrte Regel Quinque.

Um zu erfahren, ob ein Rechnungsfall wirklich durch die verkehrte Regel Quinque aufgelöset werden müsse, stellt man eben die Untersuchung an, wie bey der einfachen umgekehrten Regel Detri. Uebrigens darf

darf man nicht glauben, als wenn gerade allemahl beyde Verhältnisse, wodurch das Verhältniß der zu suchenden Zahl zu der gegebenen gleichartigen Zahl ausgedruckt wird, in umgekehrter Ordnung seyn müßten. Gemeiniglich ist nur das eine von den beyden gegebenen Verhältnissen in umgekehrter Ordnung.

1) Es hat jemand die Fracht für 2 Ctr. per Meile mit 3 gr. bedungen, wie viel Ctr. werden ihm für 50 rthlr. 20 Meilen weit gefahren werden müssen? 40 Centner.

a. Auf die erste Art.

M. M. Ctr.

1 : 20 = 2 : viertes Glied. — +

20 : 1 = 2 : $\frac{1}{10}$ Ctr.

gr. thlr. Ctr.

3 : 50 = $\frac{1}{10}$ : viertes Glied. + +

dafür $\frac{1}{8}$ thl. : $\frac{50}{1}$ thl. = $\frac{1}{10}$ : $\frac{8 \cdot 50}{10}$ = 40 Ctr.

b. Auf die andere Art.

Anmerkung.

Entweder müssen die 3 gr. in $\frac{1}{8}$ thlr., oder die 50 rthlr. in 1200 gr. verwandelt werden; dann ist

3 gr. : 1200 gr.

20 M. 1 M. = 2 Ctr. : sechstes Glied.

60 2400

60) 2400

40 Ctr.

2) Wenn der Mann täglich 2 ℔ Brot bekommt, so reicht ein gewisser Vorrath für 100 Mann gerade zu auf 18 Tage. Wie lange werden 300 Mann mit demselben Vorrath auskommen, wenn jeder täglich 3 ℔ erhalten sollte? 4 Tage.

a. Auf

a. Auf die erste Art.

100 M. : 300 M. = 18 T. : viertes Glied. — +

300 : 100 = 18 : 6 Tage.

2 ℔ : 3 ℔ = 6 T. : viertes Glied. — +

3 : 2 = 6 : 4 Tage.

b. Auf die andere Art.

3øø M : 1øø M.

3 ℔ : 2 ℔ = 18 Tage : sechstes Gl.

9 36

9) 36

4 Tage.

Anmerkung.

Hier steht die zu suchende Zahl mit der gegebenen gleiches Nahmens im umgekehrten Verhältniß so wohl der Mannschaft, als auch der täglichen Portion auf den Mann.

B.

## Die Regel Multiplex.

24.

Hieher gehören alle diejenigen Rechnungsfälle, in welchen das Verhaltniß der zu suchenden zu der gegebenen gleichnahmigen Größe aus mehr als aus zwey Verhältnissen zusammen gesetzt ist, und wo folglich mehr als fünf Glieder in ungerader Anzahl gegeben sind. Sie werden eben so behandelt, als die Exempel der Regel Quinque, denn auch diese gehören unter die Regel-Multiplex.

1. Die gerade oder directe Regel Multiplex.

1) An einer 50 Fuß langen, 8 Fuß hohen und 3 Fuß starken Mauer hat eine gewisse Anzahl Maurer 30 Tage zugebracht. In wie viel Tagen können sie mit einer 100 Fuß langen, 12 Fuß hohen und 4 Fuß starken Mauer fertig werden?

a. Auf

a. Auf die erste Art.

50 F. l. : 100 F. l. = 30 T. : 60 Tage.
8 F. h. : 12 F. h. = 60 T. : 90 Tage.
3 F. st. : 4 F. st. = 90 T. : 120 Tage.

b. Auf die andere Art.

50 F. l. : x : 100
4. 8 F. h. : xx
3 F. st. : 4 = 30 T. : achtes Glied.

120 Tage.

2) Vermittelst eines Flaschenzuges von 4 Rollen wird ein Werkstück von 6 Fuß Länge, 4 Fuß Breite und 3 Fuß Höhe von einer gewissen Kraft fortbewegt. Wie viel Rollen werden erfordert, wenn mit derselben Kraft ein Werkstück von 9 Fuß Länge 6 Fuß Breite und 2 Fuß Höhe fortgebracht werden sollte? 6 Rollen.

6 F. l. : 3. 9 F. l.
4 F. br. : 6 F. br.
3 F. h. : 2 F. h. = 4 R. : achtes Glied.

6 Rollen.

25.

2. Die umgekehrte Regel Multiplex.

1) Zwey Pferde ziehen, vermittelst eines Flaschenzuges von 4 Rollen, ein Werkstück von 6 Fuß Länge, 4 Fuß Breite, $3\frac{1}{2}$ Fuß Höhe. Wie viel Rollen werden erfordert, wenn 3 Pferde ein Werkstück von 9 Fuß Länge, 7 Fuß Breite und 4 Fuß Höhe fortbringen sollen? 8 Rollen.

a. Auf die erste Art.

6 F. l. : 9 F. l. = 4 R. : 6 Rollen.
4 — br. : 7 — br. = 6 — : $10\frac{1}{2}$ —
$3\frac{1}{2}$ — h. : 4 — h. = $10\frac{1}{2}$ — : 12 —
2 Pf. : 3 Pf. = 12 — : viertes Glied. — +

3 — : 2 — = 12 — : 8 Rollen.

b. Auf die andere Art.

3. 6 F. l. : 3. 9 F. l.
4 — br. : 7 — br.
7. $3\frac{1}{2}$ — h. : 4 — h.
3 Pf. : 2 Pf. — 4 Rollen : zehntes Glied.
(2
8 Rollen.

Anmerkung.

Die zu suchende Anzahl der Rollen steht mit den gegebenen 4 Rollen in umgekehrtem Verhältniß der Pferde, daher stehen in der ersten Columne 3, in der zweyten Columne 2 Pferde. Denn 3 Pferde brauchen so viel Rollen nicht als 2 Pferde; das zweyte Glied aber ist größer als das erste.

2) 60 Arbeiter haben einen Deich 500 Fuß lang, 6 Fuß hoch, unten 27 oben 8 Fuß breit in 8 Wochen vollendet; wie viel Arbeiter werden erfordert, wenn ein Deich von 100 Fuß Länge, 10 Fuß Höhe, unten 54 oben 15 Fuß Breite in 15 Wochen zu Stande gebracht werden sollte, vorausgesetzt, daß die Umstände dieselben sind, daß nemlich das Erdreich von eben der Beschaffenheit und auch nicht weiter herbeygeschafft werden darf? 40 Arbeiter.

a. Auf die erste Art.

500 Fl. l. : 100 = 60 Arb. : 12 Arb.
6 — h. : 10 = 12 — : 20 —
8 — br. : 15 = 20 — : $37\frac{1}{2}$ —
27 — br. : 54 = $37\frac{1}{2}$ — : 75 —
8 Wochen : 15 = 75 : viertes Glied. — +

15 : 8 = 75 : 40 Arbeiter.

b. Auf

### b. Auf die andere Art.

ſtøø F. l. : 1øø
6 — h. : 2 . xø
8 — br. : xſ
xſ — br. : 2 . ſ4
xſ Wochen : 8 = 60 Arb. : zwölftes Glied.

6) 240 / 40 Arbeiter.

## C.

## Die Kettenregel.

### 26.

Die Kettenregel iſt von der Regel Multiplex in folgenden zwey Stücken unterſchieden.

1. Für die Regel Multiplex ſind die Verhältniſſe genau beſtimmt, woraus das Verhältniß des zu ſuchenden Gliedes zu dem gegebenen gleichnahmigen Gliede zuſammen geſetzt iſt, daher darf man auch keins von dieſen Verhältniſſen aus der Rechnung weglaſſen. In der Kettenregel aber kann man das Verhältniß des verlangten Gliedes zu dem gegebenen gleichnahmigen Gliede durch mehr oder weniger Verhältniſſe beſtimmen. Will man z. B. wiſſen, wie viel Mgl. auf 1 Fr. d'or gehen, ſo kann man ſchließen:

Entweder 1 Fr. d'or = 5 rthlr.
1 rthlr. = 24 ggr.
2 ggr. = 3 Mgr.

F. 2 Fr. d'or = 360 Mgr.

F. 1 Fr. d'or = 180 Mgr.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Oder | 1 Fr. d'or | = | 5 rthlr. |
| | 2 rthlr. | = | 3 fl. |
| | 1 fl. | = | 16 ggr. |
| | 2 ggr. | = | 3 Mgr. |
| F. | 4 Fr. d'or | = | 720 Mgr. |
| F. | 1 Fr. d'or | = | 180 Mgr. |

2. In der Kettenregel ist jedes erste Glied des folgenden Verhältnisses mit dem letzten Gliede des vorhergehenden Verhältnisses allemahl gleichartig, daß man also gleichsam sagen kann, das erste und zweyte Glied zweyer unmittelbar auf einander folgender Verhältnisse wird durch das zweyte und erste Glied derselben Verhältnisse eben so mit einander verbunden, als zwey Glieder einer Kette durch das Mittelglied. Es hat indessen dies Gleichniß den gewöhnlichen Fehler aller Gleichnisse, daß es nur zum Theil paßt. So werden z. B. in dem vorigen Aufsatz 1 Fr. d'or und 3 fl. durch Thaler mit einander verbunden; die 2 rthlr. und 16 ggr. werden durch die Benennung Florenmit einander verbunden.

27.

Was den Aufsatz betrifft, so verfährt man dabey also: Man formirt aus allen Gliedern der verschiedenen Verhältnisse, wodurch das Verhältniß der Fragezahl zur zu suchenden Zahl ausgedruckt wird, zwey Columnen oder Säulen. Oben an die zweyte Columne kommt die Fragezahl; darunter in die erste Columne eine Zahl, die mit der Fragezahl gleichartig ist, oder mit derselben gleichen Nahmen hat, und gegenüber in die zweyte Columne diejenige Zahl, worin die Sache, die mit der vorigen verglichen wird, der vorigen Sache gleich ist. Z. B. vorne wären

ge-

gewesen 1 rthlr.; sollen nun in die zweyte Columne gute Groschen zu stehen kommen, so ist 24 die Zahl, worin die gute Groschen dem Thaler gleich sind. Dann kommt in die erste Columne wieder eine Zahl, welche mit dem letzten Gliede in der zweyten Columne gleichartig ist u. s. w. bis man in der zweyten Columne auf eine Zahl kömmt, welche mit der zu suchenden gleichartig ist. Man kann sich den Aufsatz und die Folge der Glieder unter folgendem Schema vorstellen.

1 a die Fragezahl.

2 a = 3 b

4 b = 5 c

6 c = 7 d u. s. w. Dies letzte Glied muß mit der zu suchenden Zahl gleichartig seyn. Da die Glieder der ersten Columne mit dem jedesmaligen letzten Gliede der zweyten Columne allemahl einerley Benennung haben, so ists nicht nöthig, zu den Zahlen in der ersten Columne die Benennung hinzu zu setzen. Dadurch gewinnt der Aufsatz an Deutlichkeit.

28.

Ist der Aufsatz fertig, so multiplicirt man die Glieder einer jeden Columne in einander, und dividirt das Product der Glieder der zweyten Columne durchs Product der Glieder der ersten Columne. Mit dem Quotienten erhält man die verlangte Zahl unter der Benennung des letzten Gliedes der zweyten Columne.

Man kann aber auch, ehe man die Glieder in einander multiplicirt, vorher die Zahlen, die in den beyden Columnen vorkommen, gegen einander aufheben, oder sie durch einerley dritte Zahl kleinern. (VII. §. 41.)

29.

Der Nutzen dieser Kettenregel in allen Arten von Handlungsrechnungen ist nicht gering; denn sie läßt sich so wohl beym Waaren- als auch Wechselhandel, und zwar bey der Thara- und Fusti-Rechnung, in der Gewinn- und Verlustrechnung, beym ausländischen Waarenhandel, bey Wechselreductionen, bey der Avantagerechnung, beym Wechselhandel, bey den Wechselarbitragen und Wechselcommissionen mit vielem Vortheil anwenden.

Hier soll indessen bloß in einigen Beyspielen gezeigt werden, wie man bey Aufsetzung eines solchen Rechnungsfalles für die Kettenregel zu verfahren habe.

1. Exempel. Es hat jemand eine Parthie Kanten gekauft und die Brabanter Elle mit 1 rthl. 11 gr. bezahlt. Wie viel Kreuzer macht das auf die Nürnberger Elle? 125 Kreuzer.

Da die Nürnberger Elle von der Brabanter Elle verschieden ist, so muß man wissen, in was für Zahlen beyderley Maß einander gleich ist. Es gehen nemlich 20 Brabanter Ellen auf 21 Nürnberger Ellen. Ferner muß man wissen, daß 90 Kreuzer auf 1 rthlr. gehen.

Nach der gemeinen Regel Detri würde man diese Aufgabe durch folgende Schlüsse auflösen.

Wie 21 N. E. : 1 N. E. = 20 Br. E. : $\frac{20}{21}$ Br. Ellen.
Wie 1 Br. E. : $\frac{20}{21}$ Br. E. = 35 gr. : $\frac{700}{21}$ gr.
Wie 24 gr. : $\frac{700}{21}$ gr. = 1 rthlr. : $\frac{700}{504}$ = $1\frac{7}{18}$ thlr.
Wie 1 rthlr. : $1\frac{7}{18}$ rthl. = 90 Kr. : 125 Kr.

Die Nürnberger Elle ist also mit 125 Kr. bezahlt. Nach der Kettenregel aber bedarf es dieser Weitläuftigkeit nicht. Der Aufsatz ist hier:

1 Nürnb.

1 Nürnb. Elle.
3 . 21 = 5 . 20 Brab. Ellen.
1 = 5 . 33 gr.
6 . 24 = 1 thlr.
1 = 5 . 90 Kreuz.

125 Kreuz.

Man setzt 1 Nürnberger Elle, wovon man den Werth in Kreuzern wissen will, oben an in die zweyte Columne, weil der Einkauf nach Brabanter Ellen geschehen ist, so muß nun zuvörderst das Nürnberger Maß auf Brabanter reducirt werden; es gehn aber 21 Nürnberger Ellen auf 20 Brab. Ellen. Man fängt also die zweyte Reihe mit Nürnberger Ellen an, und bemerkt, daß 21 Nürnb. = 20 Brab. Ellen. Die folgende Zeile hebt nun wieder mit Brab. Ellen als der letzten Benennung an. Man entsinne sich nun, was von den Brab. Ellen bekannt ist. In der Aufgabe heißts: 1 Brab. Elle ist bezahlt mit 1 Thlr. 11 Gr. oder mit 35 Gr., das heißt kurz 1 Brab. Elle = 35 Gr. Da man nun wissen will, wie viel Kreuzer 1 Nürnberger Elle gekostet, so muß man nach und nach das Verhältniß der Groschen zu den Kreuzern ausdrücken, und da könnte man nun sagen 4 Gr. = 15 Kreuz. Man kann aber erst von den Groschen zu den Thalern und dann von den Thalern zu den Kreuzern übergehen. Nun sind die Groschen und Thaler in den Zahlen 24 und 1, die Thaler aber und Kreuzer in den Zahlen 1 und 90 gleich. Man sage also 24 Gr. = 1 Thlr. und endlich 1 Thlr. = 90 Kreuzer. Da man nun mit den Kreuzern auf diejenige Benennung gekommen ist, welche die Zahl haben soll, mit welcher die oben angesetzte Fragezahl 1 Nürnb. Elle beantwortet werden soll, so ist der Aufsatz ganz vollständig.

Nun können die Zahlen 21 und 35 gegen einander aufgehoben werden durch 7, dadurch erhält man vorne 3, hinten 5. Ferner kann man 24 und 20 durch 4 kleinern, dadurch erhält man 6 und 5. Dann kann 90 dividirt werden durch 3. 6 oder 18, dadurch bekommt man 5 anstatt 90. Endlich werden die Zahlen, die in der zweyten Columne noch stehen geblieben sind, in einander multiplicirt, so erhält man mit dem Product aus 5. 5. 5 = 125 Kr. den gesuchten Werth für 1 Nürnberger Elle.

2. Exempel. Gesetzt, der Kaufmann wollte beym Verkauf der Kanten nach Nürnberger Maß, da er die Brab. Elle für 1 Thlr. 11 Gr. eingekauft hat, 20 p. C. gewinnen. Wie theuer müßte er dann die Nürnberger Elle gegen Kreuzer verkaufen? Für 150 Kr.

Dieser Umstand mit dem 20 p. C. Gewinn muß entweder besonders berechnet werden, oder man kann ihn noch kürzer in denselben Aufsatz bringen, und dann würde man sagen: 100 Thlr. Einkauf sollen 120 Thlr. geben bey Verkauf. Diese Zahlen selbst aber würden dann in den Aufsatz gleich nach 1 Thlr. also in der vorletzten Zeile eingerückt werden müssen, und dann hieße es:

1 Nürnb. Elle
3 . 11 = 20 Brab. Elle.
1 = 5 . 33 gr.
24 = 1 thlr.
5 . 100 = 5 . 120 thlr. wegen Gewinnsts.
1 = 6 . 90 kreuz.

150 kreuz.

Daß aber der Kaufmann wirklich beym Verkauf der Nürnberger Elle für 150 Kreuzer, wenn sie ihm beym Einkauf nach der vorhergehenden Berechnung 125 Kreuzer gekostet, 20 p. C. gewinne, kann man leicht durch folgenden Schluß finden.

Eink.

Eink. Eink. Verk. Verk.

125 Kr. : 100 Kr. = 150 Kr : $\frac{150 \cdot 100}{125}$ oder 120 Kr.

3. Exempel. Hamburg giebt Ordre auf Amsterdam, daß es auf London die Summe von 2812½ ℔ Sterl. zu 36 ßl. Flám. Bo. remittiren und die Valuta zu 33¾ Stüber auf Hamburg trassiren soll. Was muß nun in Hamburg dafür bezahlt werden?

Man kann hier besonders berechnen

1. Was die genannte Summe in Amsterd. Bo. betrage, folgendergestalt:

x. 5625 . 28 1 x $\frac{x}{x}$ ℔ Sterl.

1 = . . . 18 . 36 ßl. flám. Bo.
20 = 6 fl. holl.
1 = 20 Stüber
50 = . . . . . 1 thlr. A. Bo.

$\frac{5625 \cdot 18 \cdot 6}{50} = \frac{607500}{50} =$ 12150 thl. A. Bo.

2. Wie viel diese 12150 thlr. A. Bo. in Hamburger Bo. betragen.

12150 thlr. A. Bo.
50 Stüber

32 ßl. Lüb.

1 Mark

1 thlr. Hamb. Bo.

12150 . 50 . 32.

30 . 50 . 2 . 4 = 12000 thl Hamb. Bo.

Man kann aber auch beydes in einen einzigen Aufsatz beingen.

$\frac{5625}{2} \cdot 28 \frac{1}{2}$ Pfd. Sterl.

1 = 12 . 36 ßl. Flám. Bo.
20 = 6 fl. holl.
1 = 20 Stüber.

$\frac{135}{4} \cdot 33\frac{3}{4}$ = 2 . 32 ßl. Lüb.
16 = 1 Mark
3 = 1 thlr. Hamb. Bo.

$\frac{135}{4}$ $\frac{5625 . 12 . 6 . 2}{2}$

135 5625 . 12 . 6 . 4

$\frac{1620000}{135}$ = 12000 thl. Hamb. Bo.

## D.

## Die Theilungsrechnung.

30.

Durch die Theilungsrechnung sollen die Theile einer gegebenen Größe so bestimmt werden, daß sie den bekannten Theilen einer andern Größe proportionirt sind. Folglich müssen zwey Größen und die Theile der einen von diesen beyden Größen gegeben seyn; die andere gegebene Größe aber soll so getheilt werden, daß sich die Theile derselben zu den bekannten Theilen der ersten Größe wie die beyden Größen selbst verhalten.

31.

Der Vorfälle, wo man von dieser Rechnung Gebrauch machen kann, sind im gemeinen Leben sehr viele. Z. B. beym Compagniehandel, bey Concursen, bey Erbtheilungen, bey Contributionen, auch bey Compositionen verschiedener Ingredienzien zu einer bestimmten Masse ꝛc.

32.

32.

Im allgemeinen läßt sich zur Auflösung der hieher gehörigen Rechnungsfälle folgende Regel geben. Man sucht

1. zu der einen Größe, deren Theile bekannt sind,
2. zu der andern Größe, deren Theile bestimmt werden sollen, und
3. zu jedem gegebenen Theil der ersten Größe die vierte Proportionalzahl.

33.

I. Exempel der Gesellschafrsrechnung.

a. Der einfachen Gesellschaftsrechnung, oder wenn die Theilung nur nach einer Proportion eingerichtet werden soll.

Man sucht hier durch so oftmahlige Wiederholung der Regel Detri, als Theile gemacht werden sollen, die vierte Proportionalzahl zur Summe der gegebenen Theile, zu der zu theilenden Größe und zu jedem gegebenen Theil. Man kann aber auch zur Abkürzung der Rechnung, wenn es die Beschaffenheit der Zahlen erlaubt, vorher noch alle gegebenen Theile durch einerley Größe dividiren.

1. Exempel. Drey Personen haben mit einer Summe von 2200 thlr., wozu A. 1000, B. 800 und C. 400 thlr. gegeben hat, 891 thlr. gewonnen. Wie viel wird nun jedem von diesem Gewinn nach Verhältniß seines Beytrags zukommen?

200

A. 1000 | 5
B. 800 | 4 } 11 thl. : 891 thl. = { 5 : 405 thl. des A Antheil
C. 400 | 2 } { 4 : 324 • — B —
{ 2 : 162 • — C —

891 thlr.

Man

Man hätte hier eigentlich so schließen sollen:

2200 thlr. : 891 thlr. = { 1000 : 405. / 800 : 324. / 400 : 162.

Allein nach VII. §. 32. wird die Proportion nicht aufgehoben, wenn man das erste und dritte Glied einer geometrischen Proportion durch einerley Zahl dividirt. Kleinert man nun hier durch 200, so erhält man obige Zahlen, nämlich im ersten Gliede 11, im dritten Gliede 5, 4 und 2.

Von der Richtigkeit einer solchen Berechnung kann man sich leicht überzeugen, wenn man die gefundenen Theile addirt, und wenn dann die Summe derselben der zu theilenden Zahl ist.

34.

Wenn eine Größe in sehr viele, oft mehrere Hundert Theile getheilt werden soll, wie dies unter andern bey Contributionen, Fourageliefernngen, außerordentlichen Steuern, feindlichen Brandschatzungen und dergleichen der Fall ist, so wird die Berechnung sehr erleichtert, wenn man sich einen so genannten Schlüssel, wie es die practischen Rechenmeister nennen, anfertigt. Was es damit für eine Bewandniß habe, wird aus folgendem Beyspiel klar werden.

2. Exempel. Vier und zwanzig Dorfschaften sollen nach Verhältniß ihrer ins Feuercataſtrum eingetragenen Gebäude gemeinschaftlich einen Brandschaden von 4500 Thlr. tragen. Wie viel wird jede Dorfschaft zu dieser Summe beytragen müssen, wenn aufgeführt sind die Gebäude des Dorfes

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | mit | 5625thl. | 8gr. |
| B | — | 3960 | — |
| C | — | 4800 | 20 |
| D | — | 8400 | 6 |
| E | — | 6400 | 18 |
| F | — | 3605 | 16 |
| G | — | 6125 | 14 |
| H | — | 1400 | 12 |
| I | — | 4025 | 16 |
| K | — | 5855 | 10 |
| L | — | 3700 | 13 |
| M | — | 6500 | 4 |
| N | — | 12405 | 15 |
| O | — | 9336 | 7 |
| P | — | 5740 | 17 |
| Q | — | 5000 | — |
| R | — | 5650 | 19 |
| S | — | 3213 | 3 |
| T | — | 4020 | 5 |
| V | — | 2415 | — |
| W | — | 3600 | 12 |
| X | — | 8751 | — |
| Y | — | 9002 | 9 |
| Z | — | 5463 | 16 |

Anstatt nun zu schließen:

Thlr. Thlr. Thlr. Gr.

135000 : 4500 = 5625, 8 : viertes Glied

135000 : 4500 = 3960 : viertes Glied

u. s. w. berechne man, wie viel von dem einzutheilenden 4500 Thlr. auf 1 Gr. fallen werden, oder wie viel jedes Dorf von 1 Gr. geben müsse, um die 4500 Thlr. zusammen zu bringen. Also

Thlr. Thlr. Gr. Gr.

135000 : 4500 = 1 : $\frac{1}{30}$ d. i. $\frac{2}{5}$ Pf.

Und verwandelt man diese $\frac{2}{5}$ Pfennige in einen Decimalbruch nach IV. §. 5, so ist $\frac{2}{5}$ Pf. = 0,4 Pf.

Also fallen 0,4 Pf. auf 1 Gr.

Nun berechne man:

wie viel auf 2 bis 23 Gr.

— — — 1 Thlr. bis 9 Thlr.

— — — 10 bis 90 Thlr.

— — — 100 bis 900 Thlr.

— — — 1000 bis 10000 Thlr. fallen,

folgendergestalt.

135000thl. —gr.

| Grosch. | thl. | gr. | pf. | Thaler | thl. | gr. | pf. | Thaler | thl. | gr. | pf. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 giebt | . | . | 0,4. | 1 giebt | . | . | 9,6 | 100 geben | 3 | 8 | . |
| 2 geben | . | . | 0,8 | 2 geben | . | 1. | 7,2 | 200 — | 6 | 16 | . |
| 3 — | . | . | 1,2 | 3 — | . | 2 | 4,8 | 300 — | 10 | . | . |
| 4 — | . | . | 1,6. | 4 — | . | 3 | 2,4. | 400 — | 13 | 8 | . |
| 5 — | . | . | 2,0 | 5 — | . | 4 | — | 500 — | 16 | 16 | . |
| 6 — | . | . | 2,4. | 6 — | . | 4 | 9,6 | 600 — | 20 | . | . |
| 7 — | . | . | 2,8. | 7 — | . | 5. | 7,2 | 700 — | 23 | 8 | . |
| 8 — | . | . | 3,2 | 8 — | . | 6 | 4,8 | 800 — | 26 | 16 | . |
| 9 — | . | . | 3,6. | 9 — | . | 7. | 2,4. | 900 — | 30 | . | . |
| 10 — | . | . | 4,0 | | | | | | | | |
| 11 — | . | . | 4,4 | 10 — | — | 8 | . | 1000 — | 33 | 8 | . |
| 12 — | . | . | 4,8 | 20 — | — | 16 | . | 2000 — | 66 | 16 | . |
| 13 — | . | . | 5,2 | 30 — | 1 | . | . | 3000 — | 100 | . | . |
| 14 — | . | . | 5,6. | 40 — | 1 | 8 | . | 4000 — | 133 | 8 | . |
| 15 — | . | . | 6,0. | 50 — | 1 | 16 | . | 5000 — | 166 | 16 | . |
| 16 — | . | . | 6,4. | 60 — | 2 | . | . | 6000 — | 200 | . | . |
| 17 — | . | . | 6,8. | 70 — | 2 | 8 | . | 7000 — | 233 | . | . |
| 18 — | . | . | 7,2 | 80 — | 2 | 16 | . | 8000 — | 266 | 18 | . |
| 19 — | . | . | 7,6. | 90 — | 3 | . | . | 9000 — | 300 | . | . |
| 20 — | . | . | 8,0 | | | | | 10000 — | 333 | 8 | . |
| 21 — | . | . | 8,4. | | | | | | | | |
| 22 — | . | . | 8,8. | | | | | | | | |
| 23 — | . | . | 9,2 | | | | | | | | |

Nun

Nun läßt sich durch bloßes Addiren berechnen, wie viel jede Dorfschaft z. B. die Dorfschaft A von ihren 5625 thlr. 8 gr. geben muß; denn

von 5000thl. muß sie geben 166 thl. 16gr. —pf.
von 600 . — — 20 . — . — .
von 20 . — — — . 16 . — .
von 5 . — — — . 4 . — .
von — . 8gr. — — . — . 3,2 .

Folgl. v. 5625thl. 8gr. — 187thl. 12gr. 3,2pf.

Eben so findet man den Beytrag der Dorfschaft B von ihren 3960 thlr.; denn

von 3000thl. muß sie geben 100thl. — gr. —pf.
von 900 . — — 30 . — . — .
von 60 . — — 2 . — . — .

Folgl. v. 3960thl. — — 132 thlr. — —

Auf gleiche Art verfährt man mit den übrigen.

Es giebt also:

| | Thlr. | Gr. | | Thlr. | Gr. | Pf. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A von | 5625 | 8 | einen Beytrag von | 187 | 12 | 3,2. |
| B — | 3960 | — | — — — | 132 | — | — |
| C — | 4800 | 20 | — — — | 160 | — | 8,0. |
| D — | 8400 | 6 | — — — | 280 | — | 2,4. |
| E — | 6400 | 18 | — — — | 213 | 8 | 7,2. |
| F — | 3605 | 16 | — — — | 120 | 4 | 6,4. |
| G — | 6125 | 14 | — — — | 204 | 4 | 5,6. |
| H — | 1400 | 12 | — — — | 46 | 16 | 4,8. |
| I — | 4025 | 16 | — — — | 134 | 4 | 6,4. |
| K — | 5855 | 10 | — — — | 195 | 4 | 4,0. |
| L — | 3700 | 13 | — — — | 123 | 8 | 5,2. |
| M — | 6500 | 4 | — — — | 216 | 16 | 1,6. |
| N — | 12405 | 15 | — — — | 413 | 12 | 6,0. |
| O — | 9336 | 7 | — — — | 311 | 5 | 0,4. |
| P — | 5740 | 17 | — — — | 191 | 8 | 6,8 |
| | 87883 | 8gr. | — — — | 2929 | 10 | 8pf. |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Transp. | 87873 | 8 | — | — | — | 2929 | 10 | 8 | |
| Q — | 5000 | — | — | — | — | 166 | 16 | — | |
| R — | 5650 | 19 | — | — | — | 188 | 8 | 7,6 | |
| S — | 3213 | 3 | — | — | — | 107 | 2 | 6,0. | |
| T — | 4020 | 5 | — | — | — | 134 | • | 2,0. | |
| V — | 2415 | — | — | — | — | 80 | 12 | — | |
| W — | 3600 | 12 | — | — | — | 120 | — | 4,8. | |
| X — | 8751 | — | — | — | — | 291 | 16 | 9,6 | |
| Y — | 9002 | 9 | — | — | — | 300 | 1 | 10,8 | |
| Z — | 5463 | 16 | — | — | — | 182 | 2 | 11,2. | |
| | 135000th. | — | gr. | | | 4500th. | — | gr. | — pf. |

Auf gleiche Art würde nun wieder die Eintheilung für jede Dorfschaft besonders gemacht werden müssen. Bestehn die einzelnen gegebenen Theile auch aus Pfennnigen, so würde man berechnen müssen, wie hoch sich der Beytrag von 1 Pf. belaufe, dann von 2 bis 11 Pf., ferner von 1 bis 23 Gr. u. s. w.

35.

b. Die doppelte Gesellschaftsrechnung, oder wenn die Theilung nach mehr als einem Verhältniß gemacht werden soll.

Man multiplicirt jeden gegebenen Theil in die zugehörige Zeit oder in andere sich darauf beziehende Umstände; dann sucht man zur Summe der erhaltenen Producte, zu der zu theilenden Größe und zu jedem einzelnen Producte die vierte Proportionalzahl.

1. Exempel. Vier Fabrikanten beladen auf der Rückkehr von der Messe ein Fahrzeug mit ihren Waaren. Der eine mit 12 Lasten, die er 18 Meilen weit, der ander mit 15 L. die er 27 M. weit, der dritte mit $7\frac{4}{5}$ Last, die er 15 Meilen weit, und

der

der vierte mit $10\frac{1}{2}$ Last, die er 12 Meilen weit fahren läßt. Dafür bezahlen sie zusammen 72 Thlr. Wie viel fällt davon auf einen jeden besonders?

| | L. | M. | | 9 | | | Thl. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 12. | 18. | = | 216 | 24 | } | 96 : 72 = | { | 24 : 18 | |
| B. | 15. | 27. | = | 405 | 45 | | | | 45 : $33\frac{3}{4}$ | |
| C. | $7\frac{4}{5}$. | 15. | = | 117 | 13 | | | | 13 : $9\frac{3}{4}$ | |
| D. | $10\frac{1}{2}$. | 12. | = | 126 | 14 | | | | 14 : $10\frac{2}{4}$ | |
| | | | | | | | | | | 72thl. |

## Anmerkung.

Da es in Ansehung der Bezahlung gleichviel ist, ob man das Fahrlohn
von 12 L. für 18 oder von 12. 18 d. i. 216 L. für 1 M.
— 15 L. — 27 — — — 15 . 27 = 405. — 1 —
— $7\frac{4}{5}$. — 15 — — $7\frac{4}{1}$. 15 = 117. — 1 —
— $10\frac{1}{2}$. — 12 — — $10\frac{1}{2}$. 12 = 126. — 1 —
bezahlt, so läßt sich durch die Multiplication der beyden Zahlen in einander die doppelte Gesellschaftsrechnung in die einfache verwandeln.

2. Exempel. Bey einem Bau sind die Fuhren an drey Fuhrleute für 108 Thlr. verdungen. Nun hat der erste Fuhrman 1 Knecht mit 4 Pferden 8 Tage täglich 12 Stunden, der andere 3 Knechte mit 12 Pferden 5 Tage täglich 8 Stunden; der dritte 2 Knechte mit 8 Pferden 6 Tage, täglich 8 Stunden zur Arbeit geschickt. Wie viel wird jeder von dem ganzen Verdienst bekommen?

| | K. | Pf. | T. | St. | | 96 | | | Thl. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 4. | 8. | 12 | = | 384 | 4 | } | 27 : 108 = | { | 4 : 16 | thl. |
| 3. | 12. | 5. | 8 | = | 1440 | 15 | | | | 15 : 60 | . |
| 2. | 8. | 6. | 8 | | 768 | 8 | | 1 : 4 = | | 8 : 32 | . |
| | | | | | | | | | | | 108 thl. |

## 36.

## II. Die Erbtheilungsrechnung.

### a. Wenn eines jeden Theil nach einem gewissen Verhältniß deutlich bestimmt ist.

1. Exempel. 3 Kinder aus der ersten Ehe, deren Mutter ihrem Vater 9000 thlr. zugebracht, und 2 Kinder aus der andern Ehe, deren mütterlich Vermögen 7000 thlr. betragen, sollen sich nach des Vaters Tode nach Verhältniß des mütterlichen Vermögens in ein Erbgut von 20000 Thlr. theilen. Wie viel wird jedes Kind bekommen?

Man theile zuvörderst, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Erben zu nehmen, die ganze Erbsumme in zwey solche Theile, wie es im Testamente bestimmt worden, und dividire dann jeden Theil in die Anzahl der dazu gehörigen Erben.

1000

Mitgabe der ersten Fr. 9000 thlr. | 9 } 16 : 20000 = { 9 : 11250 thlr.
— — zweyten Fr. 7000 , | 7 } 1 : 1250 { 7 : 8750 ,

Es bekommt also jedes Kind erster Ehe $\frac{11250}{3} = 3750$ thlr.

zweyter Ehe $\frac{8750}{2} = 4375$ thlr.

2. Exempel. Drey Kinder sollen sich solchergestalt in eine Summe von 9000 Thaler theilen, daß das jüngste $\frac{5}{12}$, das mittelste $\frac{1}{3}$, und das älteste $\frac{1}{4}$ bekomme. Wie groß ist eines jeden Kindes Theil?

12

Das jüngste $\frac{5}{12}$ | 1 — 5 }
Das mittelste $\frac{1}{3}$ | 4 — 4 } 12 : 9000 = 1 : 750 = { 5 : 3750 thlr. / 4 : 3000 , / 3 : 2250 ,
Das älteste $\frac{1}{4}$ | 3 — 3 }

9000 thlr.

37.

b. Wenn außer dem bestimmten verhältnißmäßigen Theil ein und der andere Erbe gewisser Ursachen halber eine benannte Summe vor den andern voraus haben, oder das bereits empfangene ihnen bey der Theilung angerechnet werden soll.

3. Exempel. Ein Erbgut von 12000 Thlr. soll unter 4 Kinder so getheilt werden, daß der ältern Tochter 400 Thlr., der jüngern 300 Thlr., die sie bey ihrer Ausstattung, dem ältern Sohn 600 Thlr., die er zum Hauskauf erhalten, angerechnet werden, der jüngste Sohn aber von dem vorhandenen baaren Vermögen den sechzehnten Theil voraus haben soll. Wie viel bekommt noch jedes Kind?

| | | |
|---|---|---|
| | Baare Verlassenschaft | 12000 thlr. |
| Hievon des jüngsten 16ter Theil | — | 750 ▪ |
| | | 11250 ▪ |

Hierzu was die drey ältern Kinder bereits empfangen haben:

| | | |
|---|---|---|
| die ältere Tochter näml. | 400 | |
| die jüngere Tocht. | — 300 | — 1300 |
| der ältere Sohn | — 600 | |
| | | 12550 |

4) 12550

3137 = 12g.

Folglich bekommt jetzt bey der Theilung

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| die ältere Tochter | 3137 thl. | 12 gr. | — | 400 thl. | = | 2737 thl. | 12 gr. |
| die jüngere Tocht. | 3137 ; | 12 ; | — | 300 ; | = | 2837 ; | 12 ; |
| der ältere Sohn | 3137 ; | 12 ; | — | 600 ; | = | 2537 ; | 12 ; |
| der jüngere Sohn | 3137 ; | 12 ; | † | 750 ; | = | 3887 ; | 12 ; |
| | | | | | | 12000 thl. | — |

4. Exempel. Die Bestimmungen der vorigen Aufgabe mögen bleiben. Da aber die beyden Töchter außerhalb der Gerichtsbarkeit ihrer Vaterstadt verheyrathet worden sind, und der Magistrat des Orts auf 10 p. C. ihres Erbtheils unter dem Titel Abschoß

Anspruch

Anspruch machen möchte, so ist des Vaters Wille, daß alle vier diesen Verlust gemeinschaftlich nach Verhältniß ihres Antheils tragen sollen. Wie viel wird nun jeder Erbe bekommen?

Nach der vorig. Aufgabe war der ältern Tochter Theil 2737,5 thl.
der jüngern Tochter Theil 2837,5 ;
zusammen 5575 thl.

davon sind 10 p. C. Abschoß = 557,5 Thlr. Diese Summe sollen nach dem Willen des Vaters alle vier nach Verhältniß ihres eigenthümlichen Antheils tragen. Folglich

125:10

| | | | Thlr. | | Thlr. | Gr. | Pf. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2737,5 | 219 | } | 960:557,5 = | { | 219: | 127. 4. | 3,75. |
| 2837,5 | 227 | | | | 227: | 131. 19. | 9,75. |
| 2537,5 | 203 | | 9600:5575 | | 203: | 117. 21. | 3,75. |
| 3887,5 | 311 | | | | 311: | 180. 14. | 6,75. |
| | | | 384: 223 | | | | |

557th. 12gr.

Folglich bekommt jedes Kind baar, und zwar

die älteste T. 2737th. 12gr. — 127th. 4gr. 3,75 = 2610th. 7gr. 8,25pf.
die jüng T. 2837 ; 12 ; — 131 ; 19 ; 9,75 = 2705 ; 16 ; 2,25 ;
der ältere S. 2537 ; 12 ; — 117 ; 21 ; 3,75 = 2419 ; 14 ; 8,25 ;
der jüng. S. 3887 ; 12 ; — 180 ; 14 ; 6,75 = 3706 ; 21 ; 5,25 ;

12000 th. ; — 557th. 12 gr. = 11442th. 12gr. —

## 38.

### III. Die Compositions- und Alligationsrechnung.

#### a. Die Compositionsrechnung.

Man sucht hier ebenfalls zur Summe der bekannten Theile einer gegebenen Zahl, zu derjenigen Zahl, deren Theile man wissen will, und zu jedem bekannten Theil der ersten Zahl die vierte Proportionalzahl.

1. Exempel. Zu einem gewissen Mixtum von 20 Unzen kommen dreyerley Species. Von der einen 5, von der andern 6, von der dritten 9 Unzen.

Wie viel wird von jeder Species zu 36 Unzen genommen werden müssen?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | 5. U. | U. | U. | 5. U. | : 9 Unzen von I. |
| II. | 6. • | 20 | 36 | 6 • | : $10\frac{4}{5}$ • von II. |
| III. | 9. • | 5 | 9 | 9 • | : $16\frac{1}{5}$ • von III. |
| | | | | | 36 Unzen. |

2. Exempel. Auf 8 ℔ Satz zu Leuchtkugeln gehören 1 ℔ Antimonium, 2 ℔ Salpeter, 3 ℔ Schwefel und 2 ℔ Kohlen, welches alles mit Werch und Spiritus unter einander gemischt wird. Wie viel muß man von jeder Species zu 50 ℔ nehmen?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Antimonium | 1 ℔ | | | 1 : | $6\frac{1}{4}$ ℔ Antimon. |
| Salpeter | 2 • | ℔ | ℔ | 2 : | $12\frac{2}{4}$ • Salpeter. |
| Schwefel | 3 • | 8 | 50 | 3 : | $18\frac{3}{4}$ • Schwefel. |
| Kohlen | 2 • | | | 2 : | $12\frac{2}{4}$ • Kohlen. |
| | | | | | 50 ℔. |

3. Exempel. Das Mixtum zum bekannten Knallpulver besteht aus gereinigtem Salpeter, Sal Tartari und Schwefel, und zwar in dem Verhältniß wie 3 : 2 : 1. Wie viel wird man von jeder Species zu 2 Unzen nehmen müssen?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Salpeter | 3. | U. | | 3 : | 1 Unze oder 2 Loth. Salp. |
| Sal Tart. | 2. | 6 | 2 | 2 : | $\frac{2}{3}$ — oder $1\frac{1}{3}$ • S. T. |
| Schwefel | 1. | | | 1 : | $\frac{1}{3}$ — oder $\frac{2}{3}$ • Schw. |
| | | | | | 2 Unzen od. 4 Loth. |

39.

## b. Die Alligationsrechnung.

Die Alligationsrechnung lehrt, wie man Dinge von verschiedener Güte mit einander vermischen soll, damit man etwas erhalte, was zwar geringer, als das bessere, aber besser, als das schlechtere von den zu vermischenden Dingen ist. Die zu vermischen-

den

den Dinge nennt man die Extrema, was aber aus dieser Vermischung entstehen soll, das Medium.

40.

1. Wenn nur zwey Extrema gegeben sind.

Man setze die beyden gegebenen Extrema unter einander, das Medium aber daneben linker Hand. Suche dann die Differenz zwischen dem Medium und bessern Extremum und setze sie neben das schlechtere Extremum; desgleichen die Differenz zwischen dem Medium und schlechtern Extrem und setze sie neben das beßre Extrem.

1. Exempel. Ein Goldschmidt hat zwar 8 und 15 löthiges Silber, braucht aber zu einer gewissen Arbeit 13 löthiges. Wie viel muß er von jedem zu 21 Mark nehmen, um das benöthigte 13 löthige zu bekommen?

$$13 \left\{ \begin{array}{l} 8 \mid 2. \\ 15 \mid 5. \end{array} \right.$$

Hier sind die beyden Extreme das vorhandene 8 und 15 löthige Silber, das 13 löthige aber, das man gern haben möchte, das Medium. Man setze nun $13 - 8 = 5$ neben das bessere 15 löthige, und $15 - 13 = 2$ neben das schlechtere 8 löthige.

Diese Differenzen zeigen an, daß, so oft man vom 8 löthigen 2 Theile nimmt, man eben so oft von 15 löthigen 5 Theile nehmen müsse.

Will man nun endlich wissen, wie viel man von jedem Extrem zu der benöthigten Quantität von 21 Mark nehmen müsse, so suche man

zur Summe der gefundenen Differenzen,
zur Quantität von der verlangten Güte und
zu jeder Differenz die vierte Proportionalzahl. Also

$$13\left\{\begin{matrix}8 & 2\\15 & 5\end{matrix}\right\}7:21\text{ Mark}=\left\{\begin{matrix}2:\ 6\text{ Mark von 8löthigen.}\\5:15\ \text{—}\ \text{von 15löthig.}\end{matrix}\right.$$

Probe.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| In 6 Mark 8 löthigen Silber sind enthalten | | | | 48 Loth fein Silber |
| In 15 Mark 15 löthigen Silber | — | — | | 225 — — — |
| F. in 21 Mark | — | — | — | 273 — — — |
| F. in 1 Mark | — | — | — | 13 Loth fein Silber. |

2. Exempel. Ein Weinhändler hat Rheinwein von zweyerley Güte, nämlich das Quart zu 1 Thlr. 16 Gr. und zu 22 Gr. Wie viel muß er von jeder Art zu 1 Eimer oder 64 Quart nehmen, um das Quart für 1 Thlr. 8 Gr. verkaufen zu können.

$$\text{gr. } 32\left\{\begin{matrix}22\text{gr.} & 8 & 4\\40\text{gr.} & 10 & 5\end{matrix}\right\}9:64\ \overset{\text{Quart}}{=}\left\{\begin{matrix}4:28\tfrac{4}{9}\text{ D. v. 22 gr. W.}\\5:35\tfrac{5}{9}\text{ D. v. 40 gr. W.}\end{matrix}\right.$$

64 Quart.

41.

## 2. Wenn mehrere Extreme vorhanden sind.

Das Verfahren hierbey wird man am besten aus folgenden Beyspielen ersehen können.

3. Exempel. Ein Goldschmidt hat dreyerley Silber, nämlich 9, 11 und 15 löthiges; braucht aber 10 Mark 13 löthiges Silber. Wie viel muß er von jedem bey Beschickung des Tiegels nehmen, um die benöthigten 10 Mark 13 löthiges Silber zu erhalten.

$$13\left\{\begin{matrix}9 & 2 & 2 & 1\\11 & 2 & 2 & 1\\15 & 4+2 & 6 & 3\end{matrix}\right\}5:10\ \overset{\text{Mark}}{=}\left\{\begin{matrix}1:2\text{ Mark vom 9 löth.}\\1:2\ \text{,}\ \text{—}\ 11\ \text{,}\\3:6\ \text{,}\ \text{—}\ 15\ \text{,}\end{matrix}\right.$$

10 Mark.

Probe.

Probe.

In 2 Mk. 9löthigen Silber sind enth. 18 Loth fein Silber
In 2 — 11 — — — — 22 — — —
In 6 — 15 — — — — 90 — — —

F. in 10 Mk. zusammen — 130 — — —

F. in 1 Mk. — — — 13 — — —

4. Exempel. Gesetzt er habe aus denselben Extremen 10 Mk. 10löthiges Silber machen wollen, so fällt das verlangte Medium zwischen dem schlechtesten und den beyden bessern Extremen. Also:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 5 † 1 | 6 | Mk. | 6 : $7\frac{2}{4}$ | Mk. | 9 löthiges. |
| | 11 | 1 | 1 | 8 : 10 = | 1 : $1\frac{1}{4}$ | — | 11 — |
| | 15 | 1 | 1 | | 1 : $1\frac{1}{4}$ | — | 15 — |

10 Mark.

5. Exempel Ein Juwelier hat 16, 18, 21 und 22 karatiges Gold; wie viel muß er von jedem zu 12 Mk. 20 karathigen Golde nehmen?

1. Wenn 16 mit 22, 18 mit 21 besonders legirt werden.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 2 | Mk. | 2 : $2\frac{2}{3}$ | Mk. | von 16 | karathigen |
| | 18 | 1 | 9 : 12 = | 1 : $1\frac{1}{3}$ | — | — 18 | — |
| | 21 | 2 | | 2 : $2\frac{2}{3}$ | — | — 21 | — |
| | 22 | 4 | | 4 : $5\frac{1}{3}$ | — | — 22 | — |

12 Mark.

2. Wenn jedes schlechtere Extrem mit den beyden bessern, nemlich 16 mit 21 und 22, 18 mit 21 und 22 legirt wird.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 1 † 2 | 3 | 1 | Mk. | | |
| | 18 | 1 † 2 | 3 | 1 | 6 : 12 = | 1 : 2 | Mk. v. 16 karath. |
| | 21 | 4 † 2 | 6 | 2 | | 1 : 2 | — — 18 — |
| | 22 | 4 † 2 | 6 | 2 | | 2 : 4 | — — 21 — |
| | | | | | | 2 : 4 | — — 22 — |

12 Mark.

3. Wenn 16 mit 21 und 18 mit 22 legirt wird.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 1 | Mk. | 9 : 12 — | 1 : 1 1/5 | Mk. von 16 karathig. | | |
| | 18 | 2 | | | 2 : 2 2/3 | — — | 18 | — |
| | 21 | 4 | | | 4 : 5 1/3 | — — | 21 | — |
| | 22 | 2 | | | 2 : 2 2/3 | — — | 22 | — |
| | | | | | | 12 Mark. | | |

4. Wenn 16 mit 21 und 22, 18 mit 22 legirt wird.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 1+2 | 3 | Mk. | 15 : 12 — | 3 : 2 2/5 | Mk. von 16 kar. | |
| | 18 | 2 | 2 | | | 2 : 1 3/5 | — — | 18 — |
| | 21 | 4 | 4 | | | 4 : 3 1/5 | — — | 21 — |
| | 22 | 4+2 | 6 | | | 6 : 4 4/5 | — — | 22 — |
| | | | | | | 12 Mark. | | |

5. Wenn 16 mit 21 und 22, 18 mit 21 legirt wird.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 1+2 | 3 | Mk. | 14 : 12 — | 3 : 2 4/7 | Mk. von 16 kar. | |
| | 18 | 1 | 1 | | | 1 : , 6/7 | — — | 18 — |
| | 21 | 4+2 | 6 | | | 6 : 5 1/7 | — — | 21 — |
| | 22 | 4 | 4 | | 7 : 6 | 4 : 3 3/7 | — — | 22 — |
| | | | | | | 12 Mark. | | |

6. Wenn 16 mit 21, 18 aber mit 21 u. 22 legirt wird.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 1 | 1 | Mk. | 12 : 12 — | 1 : 1 | Mk. von 16 kar. | |
| | 18 | 1+2 | 3 | | | 3 : 3 | — — | 18 — |
| | 21 | 4+2 | 6 | | | 6 : 6 | — — | 21 — |
| | 22 | 2 | 2 | | | 2 : 2 | — — | 22 — |

Man kann also diese vier Extreme auf eine sechsfache Art legiren, um die verlangte 12 Mk. 20 karathiges Gold zu erhalten. Man nimmt nemlich

| | von 16 kar. | von 18 kar. | von 21 kar. | von 22 kar. |
|---|---|---|---|---|
| entweder | 2 2/3 Mk. | 1 1/3 Mk. | 2 2/3 Mk. | 5 1/3 Mk. |
| oder | 2 " | 2 " | 4 " | 4 " |
| oder | 1 1/5 " | 2 2/3 " | 5 1/5 " | 2 2/3 " |
| oder | 2 2/5 " | 1 3/5 " | 3 1/5 " | 4 4/5 " |
| oder | 2 4/7 " | 6/7 " | 5 1/7 " | 3 3/7 " |
| oder | 1 " | 3 " | 6 " | 2 " |

42.

**Wenn die Extreme insgesammt besser sind, als das verlangte Medium, so muß man ein Extrem zu Hülfe nehmen, das in Ansehung der zu vermischenden Sachen keinen innern Gehalt hat, dergleichen ist beym Golde und Silber das Kupfer und beym Wein das Wasser. Diesen Zusatz bezeichnet man mit 0. Dieser Umstand ändert übrigens in der Rechnung selbst nichts.**

6. Exempel. Ein Goldschmid hat 13 und 15 löthiges Silber, braucht aber 56 Mk. 10löthiges. Wie viel muß er von jeder Art und wie viel Kupfer dazu nehmen?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 13 | 10 | 10 | 5 | Mk. | 5:20 | Mk. v. 13 löt. |
| 10 | 15 | 10 | 10 | 5 | 14:56 — | 5:20 | —— 15 — |
| | 0 | 3t5 | 8 | 4 | | 4:16 | — Kupfer. |
| | | | 2 | | | 56 | Mark. |

7. Exempel. Ein Weinschenker hat Frankenwein das Quart zu 9 und 12 gr., will aber das Quart für 7 gr. verkaufen, wie viel Wasser und wie viel Wein von jeder Sorte muß er zu einem Eimer mit einander vermischen?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 7 | 7 | | Quart | 7:21 $\frac{1}{3}$ | Q. v. 9 gr. Wein. |
| 7 | 12 | 7 | 7 | 21:64 — | | 7:21 $\frac{1}{3}$ | Q. v. 12 gr. Wein. |
| | 0 | 2t5 | 7 | | | 7:21 $\frac{1}{3}$ | Q. Wasser. |
| | | | | | | 64 | Quart. |

## IV. Die Regel Falsi.

43.

**Die Regel Falsi ist eine Vorschrift, nach welcher aus willkührlich angenommenen und also eigentlich falschen Zahlen die wahren Zahlen gefunden wer-**

den können. Diese Vorschrift besteht nun im allgemeinen darin, daß man anstatt der verlangten Zahl eine oder zwey Zahlen nach Gutdünken wählt und damit die Veränderungen vornimmt, die nach den jedesmaligen Bedingungen der Aufgabe damit vorgenommen werden sollen. Nach der Anzahl der Zahlen, die man, um die Aufgabe aufzulösen, wählen muß, theilt man diese Regel ein in die einfache und doppelte Regel Falsi.

44.

1. Die einfache Regel Falsi.

Diese begreift diejenigen Rechnungsfälle, wo die mit den Zahlen vorzunehmenden Veränderungen bloß in Vermehrung und Verminderung durch die Multiplication und Division bestehen, und wo die Proportion durch dazwischen kommende Addition und Subtraction nicht unterbrochen wird. Die hieher gehörigen Aufgaben lassen sich durch eine einzige angenommene Zahl auflösen. Doch muß man bey der Wahl dieser Zahl darauf sehen, daß man auch mit derselben die in der Aufgabe angezeigten Veränderungen wirklich vornehmen kann. Fügt sichs nun, daß das Resultat mit demjenigen übereinkommt, was nach dem Inhalt der Aufgabe heraus kommen soll, so hat man von ohngefähr die wahre Zahl getroffen, und die Aufgabe ist aufgelöset. Ist dies aber nicht, so schließt man:

Wie sich verhält das falsche Resultat zu dem, was heraus kommen soll, so verhält sich auch die gewählte, folglich falsche, Zahl zur wahren Zahl.

1. Aufgabe. Vier Personen haben sich in eine Summe von 9000 rthlr. zu theilen, so daß der erste 3mahl so viel bekommt als der zweyte, der zweyte zweymahl so viel als der dritte und vierte; der

der vierte zweymahl so viel als der dritte. Wie viel bekommt jeder?

Des dritten Antheil ist am einfachsten ausgedruckt, er sey = 100 rthlr.
so ist des vierten Antheil = 2.100 = 200 —
des 2ten Theil = 2.(100+200) = 2.300 = 600 —
des ersten Antheil = 3.600 = 1800 —

2700 rthlr.

Es soll aber die Summe aller vier Theile = 9000 seyn,
folglich $2700 : 9000 = 100 : \frac{9000 \cdot 100}{2700} = 333\frac{1}{3}$ rthlr.

Es ist also des dritten Theil = $333\frac{1}{3}$.
folgl. des 4ten Antheil = $2 \cdot 333\frac{1}{3} = 666\frac{2}{3}$
des 2ten Theil = $(2 \cdot 333\frac{1}{3} + 666\frac{2}{3}) = 2000$
des ersten Theil = 3.2000 = 6000

9000 rthlr.

2. Aufgabe. Wie viel Meilen sinds von Berlin bis Frankfurt am Mayn? Antwort 125 Meilen, wenn sie die Hälfte, den dritten und vierten Theil zusammen so weit von einander entfernt wären, als sie es wirklich sind. Wie viel Meilen sinds also?

Gesetzt die Entfernung sey = 24 Meilen
so ist die Hälfte davon = 12 —
der dritte Theil davon = 8 —
und der vierte Theil = 6 —

zusammen 50 Meilen.

Es sollen aber diese Theile zusammen genommen 125 Meilen gleich seyn, man schließe also

$50 : 125 = 24 : \frac{125 \cdot 24}{50} = 60$ Meilen.

Es ist auch wirklich $60 + \frac{60}{2} + \frac{60}{3} + \frac{60}{4} = 125$ Meilen.

45.

2. Die doppelte Regel Falsi

Man wählt nach Gefallen zwey verschiedene Zahlen, und verfährt mit jeder derselben nach dem Inhalt der Aufgabe. Sollte bey einer derselben das Resultat mit demjenigen übereinstimmen, was heraus kommen soll, so hat man von ohngefähr die wahre Zahl getroffen; ist dies aber nicht, so schließe man:

Wie die Differenz der beyden herausgebrachten Zahlen zur Differenz der beyden gewählten, so die Differenz zwischen der einen heraus gebrachten und der, die heraus kommen soll, zur Differenz zwischen der correspondirenden willkührlich angenommenen und der erhaltenen vierten Proportionalzahl.

3. Aufgabe. Eine Schäferey hat nach und nach folgenden Abgang gehabt. Im September den 8ten Theil weniger 10 Stück. Im October 136 Stück. Im November vom Rest den 7ten Theil und noch 6 Stück darüber. Im December 5 Stück über den 6ten Theil des Rests. Im Januar $\frac{1}{5}$ weniger 10 Stück. Im Februar den halben Rest weniger 111 Stück. Im März den 4ten Theil und 1 Stück. Im April den 4ten Theil vom Rest weniger 1 Stück. Zu Anfang des May waren nur noch 304 Stück übrig. Wie stark war die Anzahl zu Anfang des Septembers? Gesetzt die Anzahl sey gewesen zu Anfange Sept.

| | 1920 od. | 1344. |
|---|---|---|
| Abgang im Sept. $\frac{1}{8}$ — 10 Stück | 230 | 158 |
| Rest vltimo Sept. | 1690 | 1186 |
| Abgang im October . . | 136 | 136 |
| Rest vltimo Oct. | 1554. | 1050 |
| Abgang im November $\frac{1}{7}$ + 6 Stück | 228. | 156 |
| Rest vltimo Nov. | 1326 | 894 |

Abgang

| | | |
|---|---|---|
| Rest vltimo Nov. | 1326. | 894 |
| Abgang im December $\frac{1}{6}$ † 5 Stück | 226 | 154 |
| Rest vltimo Dec. | 1100 | 740 |
| Abgang im Januar $\frac{1}{5}$ — 10 Stück | 210. | 138 |
| Rest vltimo Jan. | 890 | 602 |
| Abgang im Februar $\frac{1}{2}$ — 111 | 334 | 190 |
| Rest vltimo Febr. | 556. | 412. |
| Abgang im März $\frac{1}{4}$ † 1 | 140 | 104 |
| Rest vltimo Martii | 416 | 308 |
| Abgang im April $\frac{1}{4}$ — 1 | 103 | 76 |
| Rest vltimo Apr. | 313 | 232 |

Da nun aber der Rest = 304 seyn soll, so schließe man 313 — 232 : 1920 — 1344 = 313 — 304 : 1920 — x.

81 : 576 = 9

Folgl. $x = \frac{576 \cdot 9}{81} = 64$; also wahre Zahl = 1920 — 64 = 1856.

Oder

313 — 232 : 1920 — 1344 = 232 — 304 = 1344 — x.

81 : 576 = — 72

F. $x = \frac{576 \cdot -72}{81} = -512.$

Folglich die wahre Zahl = 1344 — — 512 = 1856.

Probe.

| | | |
|---|---|---|
| Ultimo Augusti waren also | | 1856 Stück |
| Abgang im Septber. $\frac{1}{8}$ — 10 Stück | = | 222 |
| Bestand vltimo Sept. | = | 1634 |
| Abgang im October | | 136 |
| Bestand vltimo Octbr. | = | 1498 |
| Abgang im November $\frac{1}{7}$ † 6. | = | 220 |
| Bestand vltimo Novbr. | = | 1278 |

Abgang

| | | |
|---|---|---|
| | | 1278 Stück |
| Abgang im December $\frac{1}{6}$ † 5. | = | 218 |
| Bestand vltimo Decbr. | = | 1060 |
| Abgang im Januar $\frac{1}{5}$ — 10 | = | 202 |
| Bestand vltimo Januarii | = | 858 |
| Abgang im Februar $\frac{1}{2}$ — 111 | = | 318 |
| Bestand vltimo Februarii | = | 540 |
| Abgang im März $\frac{1}{4}$ † 1 | = | 136 |
| Bestand vltimo Martii | = | 404 |
| Abgang im April $\frac{1}{4}$ — 1 | = | 100 |
| Bestand vltimo Aprilis | = | 304 |

4. Aufgabe. Es verspielt jemand im ersten Spiel von seinem Gelde gerade den vierten Theil; im andern Spiel den 9ten Theil und 6 rthlr. drüber; im dritten Spiel vom Rest die Hälfte und 9 rthlr. drüber; im vierten wieder die Hälfte von dem Rest und 2 rthlr., und im fünften von dem Rest nochmals die Hälfte und 1 rthlr. Jetzt findet er, daß er nur noch 45 rthlr. habe und glaubt, es sey nun wohl Zeit aufzuhören. Wie viel hat er anfänglich gehabt?

Gesetzt er habe gehabt 192 oder 168 rthlr.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Verlust im ersten Spiel $\frac{1}{4}$ | = | 48 | 42 |
| Rest | = | 144 | 126 |
| Verlust im zweyten Spiel $\frac{1}{9}$ † 6 | = | 22 | 20 |
| Rest | = | 122 | 106 |
| Verlust im dritten Spiel $\frac{1}{2}$ † 9 | = | 70 | 62 |
| Rest | = | 52 | 44 |
| Verlust im vierten Spiel $\frac{1}{2}$ † 2 | = | 28 | 24 |
| Rest | = | 24 | 20 |
| Verlust im fünften Spiel $\frac{1}{2}$ † 1 | = | 13 | 11 |
| Rest | = | 11 | 9 |

Da

Da er aber noch 45 rthlr. übrig behalten hat, so schließe man:

$$\frac{11-9 : 192-168 = 11-45 : 192-x.}{2 : 24 = -34}$$

Folgl. $x = \frac{24.-34}{2} = -408.$

Folgl. hatte er anfänglich $192 - -408 = 600$ rthlr.

Oder

$$\frac{11-9 : 192-168 = 9-45 : 168-x.}{2 : 24 = -36}$$

Folgl. $x = \frac{24.-36}{2} = -432.$

Folgl. hatte er anfänglich $168 - -432 = 600$ rthlr.

Probe

| | | | |
|---|---|---|---|
| Er hatte anfänglich | | | 600 rthlr. |
| Verlust im ersten Spiel | $= \frac{600}{4}$ | $=$ | 150 |
| Rest | | $=$ | 450 |
| Verlust im zweyten Spiel | $= \frac{450}{9} + 6$ | $=$ | 56 |
| Rest | | $=$ | 394 |
| Verlust im dritten Spiel | $= \frac{394}{2} + 9$ | $=$ | 206 |
| Rest | | $=$ | 188 |
| Verlust im vierten Spiel | $= \frac{188}{2} + 2$ | $=$ | 96 |
| Rest | | $=$ | 92 |
| Verlust im fünften Spiel | $= \frac{92}{2} + 1$ | $=$ | 47 |
| Rest | | $=$ | 45 rthlr. |

5. Aufgabe. Vier Erben sollen eine gewisse Summe so theilen, daß der erste die Hälfte, der zweyte von dem bleibenden Rest den dritten Theil, der dritte von dem gebliebenen Rest den vierten Theil, und noch 50 drüber, der vierte aber den Rest von 600 rthlr. bekomme. Wie groß war die zu theilende Summe und wie viel hat jeder bekommen?

Es sey die zu theilende Summe entweder

| | | |
|---|---|---|
| | 4800 oder | 3360 rthlr. |
| so ist die Hälfte des ersten = | 2400 | 1680 |
| Rest = | 2400 | 1680 |
| der dritte Theil des zweyten = | 800 | 560 |
| Rest = | 1600 | 1120 |
| der 4te Theil † 50 des dritten = | 450 | 330 |
| der Rest für den 4ten Erben = | 1150 | 790 |

Der vierte aber soll nur 600 rthlr. bekommen, also sind beyde Zahlen zu groß angenommen, man findet daher die wahre Theilungssumme durch folgenden Schluß:

1150—790 : 4800—3360 = 1150—600 : 4800—x.

360 : 1440 = 550

Folglich $x = \frac{1440 \cdot 550}{360} = 2200.$

Folglich 4800 — x = 4800 — 2200 = 2600 rthlr.

Oder.

1150—790 : 4800—3360 = 790—600 : 3360—x.

360 : 1440 = 190

Folglich $x = \frac{1440 \cdot 190}{360} = 760.$

Folglich 3360 — x = 3360 — 760 = 2600 rthlr.

Probe.

Die zu theilende Summe = 2600 rthlr.

| | | |
|---|---|---|
| des ersten Theil = $\frac{2600}{2}$ = | | 1300 |
| Rest = | | 1300 |
| des zweyten Theil = $\frac{1300}{3}$ = | | $433\frac{1}{3}$ |
| Rest = | | $866\frac{2}{3}$ |
| des dritten Theil = $\frac{866\frac{2}{3}}{4}$ † | 50 = | $266\frac{2}{3}$ |
| des vierten Theil = | | 600 rthlr. |

46.

Man kann aber auch noch auf folgende Art verfahren. Man multiplicire jede gewählte Zahl in die Differenz zwischen dem, was bey der andern Zahl herauskommen ist, und dem, was hätte heraus kommen sollen.

Nun sind aber die herausbekommenen Zahlen entweder beyde größer, oder beyde kleiner, oder die eine größer, die andere aber kleiner, als die Zahl, die hätte herauskommen sollen.

Ist die eine herausgebrachte Zahl größer, die andere aber kleiner, als die Zahl, die hätte herauskommen sollen, so dividirt man die Summe jener Producte durch die Summe der Differenzen zwischen dem, was herausgekommen ist, und dem, was herauskommen sollte.

Sind aber beyde herausgebrachte Zahlen entweder größer oder kleiner, als die Zahl, die herauskommen sollte, so dividirt man die Differenz jener beyden Producte durch den Unterschied der Differenzen zwischen dem, was herausgekommen ist, und dem, was herauskommen sollte.

Anwendung.

1. Bey der dritten Aufgabe sollte übrig bleiben 304, es blieb aber übrig 313 und 232. Folglich ist die wahre Zahl $=$

$$\frac{a.b.c. \quad d.e.b.}{1920.(304-232)+1344(313-304)}$$
$$\overline{(304-232)+(313)-304)}$$
$$b.\quad c.\quad e.\quad b.$$

Hier ist a die erste gewählte Zahl. b die Zahl, die übrig bleiben sollte; c die Zahl, die bey der andern gewählten Zahl heraus gekommen; d die andere ge-

wählte Zahl. e die Zahl, die bey der ersten gewählten Zahl heraus gekommen.

Also $\frac{(1920.72)+(1344.9)}{72+9} = \frac{138240+12096}{81} = \frac{150336}{81} =$ 1856 Stück.

2. Bey der vierten Aufgabe sollten übrig bleiben 45 rthlr., es blieb aber bey beyden gewählten Zahlen weniger übrig, nemlich 11 und 9; es ist also die wahre Zahl =

$\frac{192(45-9)-168(45-11)}{(45-9)-(45-11)} = \frac{(192.36)-(168.34)}{36-34} =$

$\frac{6912-5712}{2} = \frac{1200}{2} =$ 600 rthlr.

3. Bey der fünften Aufgabe sollten übrig bleiben 600 rthlr. Es blieb aber bey beyden gewählten Zahlen mehr übrig, nemlich 1150 und 790. Es ist also die wahre Zahl =

$\frac{3360(1150-600)-4800(790-600)}{(1150-600)-(790-600)} = \frac{(3360.550)-(4800.190)}{550-190} =$

$\frac{1848000-912000}{360} = \frac{936000}{360} =$ 2600 rthlr.

# Neuntes Kapitel.

## Von den Progressionen und Logarithmen.

### I.

### Von den Progressionen.

#### 1.

Unter einer Progression versteht man eine Reihe Zahlen, die nach einem gewissen angenommenen Gesetz so auf einander folgen, daß entweder die größern auf die kleinern, oder umgekehrt die kleinern auf die größern folgen. Da aber dies Gesetz bloß willkührlich ist, so kann es auch sehr viele solche Zahlreihen oder Progressionen geben. Die brauchbarsten Zahlreihen sind die, wo jedes folgende Glied

ent-

entweder um eine gewisse angenommene Größe wächst oder abnimmt, und die, wo jedes folgende Glied entweder ein gewisses Multiplum oder ein aliquoter Theil vom vorhergehenden ist. Jene nennt man arithmetische, diese geometrische Progressionen.

## A.
## Von der arithmetischen Progression.

### 2.

Aus dem ersten Gliede einer arithmetischen continuirlichen Proportion und der Differenz lassen sich nach VII. §. 17. die übrigen Glieder finden. Man erhält nämlich, wenn die folgenden Glieder größer seyn sollen, als das erste, das zweyte und dritte Glied, wenn man zum ersten die Differenz, das vierte Glied aber, wenn man dieselbe Differenz wieder zum zweyten oder dritten Gliede addirt. Sollen aber die folgenden Glieder kleiner seyn, als das erste, so zieht man die Differenz ab. Wenn daher das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, so ist die Proportion

entweder $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$

oder $a - (a - d) = (a - d) - (a - 2d)$

Von beyden Proportionen machen das erste, zweyte und vierte Glied die drey ersten Glieder einer arithmetischen Progression aus, d. i. einer Reihe, worin jedes Glied zum unmittelbar vorhergehenden einerley arithmetisches Verhältniß hat.

### 3.

Betrachtet man die beyden Reihen $a, a + d, a + 2d$

und $a, a - d, a - 2d$,

so bemerkt man in der ersten, daß jedes folgende Glied gleich ist dem unmittelbar vorhergehenden

plus der Differenz, in der zweyten aber minus der Differenz. Man wird daher nach diesem Gesetz jede Reihe in infinitum fortsetzen können, so daß in der ersten die folgenden Glieder immer um die einfache Differenz zunehmen, in der andern aber abnehmen. Im ersten Fall erhält man dann eine wachsende oder steigende, im andern eine abnehmende oder fallende Reihe. Es sind also allgemein die Glieder

einer wachs. Reihe a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d..
einer abnehm. R. a, a − d, a − 2d, a − 3d, a − 4d, a − 5d..

Oder wenn in Zahlen das erste Glied oder a = 1, die Differenz oder d = 2, so ist

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 u. s. w. eine besondere wachsende, und wenn das erste Glied oder a = 30, die Differenz oder d = 7, so ist

30, 23, 16, 9, 2, — 5, — 12, — 19 u. s. w. eine besondere abnehmende Reihe.

4.

Da also eine arithmetische Progression nichts anders ist, als eine fortgesetzte arithmetische continuirliche Proportion, so müssen auch allemahl drey unmittelbar auf einander folgende Glieder einer solchen Progression eine arithmetische continuirliche Proportion machen. So geben z. B. aus der obigen Reihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| die Glied. | 1, 3, 5, | die Proport. | 1 — 3 = 3 — 5. |
| — — | 3, 5, 7, — | — — | 3 — 5 = 5 — 7. |
| — — | 11, 13, 15, — | — — | 11 — 13 = 13 — 15. |

5.

Jedes Glied einer solchen Progression ist daher auch allemahl media arithmetice proportionalis zwischen dem nächst vorhergehenden und nächst folgenden,

genden, desgleichen zwischen zwey auf beyden Seiten um eine gleiche Anzahl Glieder davon abstehenden Gliedern, das heißt: Jedes Glied ist gleich der halben Summe der beyden unmittelbar benachbarten, oder der beyden auf beyden Seiten gleichweit abstehenden Glieder. VII. §. 22.

So ist in der obigen Reihe das fünfte Glied oder

$$9 = \frac{7+11}{2} = \frac{5+13}{2} = \frac{3+15}{2} = \frac{1+17}{2}.$$

Diese Eigenschaft läßt sich also aus der Art der Entstehung einer arithmetischen Progression erklären.

6.

In allen arithmetischen Progressionen befinden sich vier unmittelbar auf einander folgende Glieder in einer discreten arithmetischen Proportion, d. i. das vierte Glied verhält sich allemahl zum dritten, wie das zweyte zum ersten. So geben aus der obigen Proportion die vier Glieder

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, 3, 5, 7 | die Proportion | 1 — 3 = 5 — 7. | |
| 3, 5, 7, 9 | — | — | 3 — 5 = 7 — 9. |
| 11, 13, 15, 17 | — | — | 11 — 13 = 15 — 17 |

u. s. w.

7.

In allen arithmetischen Progressionen hat jedes Paar Glieder, welche um gleichviel Glieder von einander abstehen, einerley arithmetisches Verhältniß. So ist

1 — 5 = 11 — 15 = 13 — 17 = 9 — 13 = 15 — 19 u. s. w.
3 — 11 = 9 — 17 = 1 — 9 = 5 — 13 = 11 — 19 u. s. w.
5 — 15 = 1 — 11 = 9 — 19 = 3 — 13 = 7 — 17 u. s. w.

Im ersten Fall ist zwischen jedem Paare ein Glied; im zweyten Fall sind drey, im dritten vier Glieder zwischen jedem Paare. Denn um in dem

letzten Fall 17 aus 7 zu machen, muß man eben so vielmahl die Differenz 2 zu 7 hinzuthun, als um 13 aus 3, 19 aus 9, 11 aus 1 und 15 aus 5 zu machen. Es muß nämlich in diesem letztern Fall die Differenz (2) fünfmahl zum kleinern Gliede hinzugethan werden, um das größre daraus zu machen, folglich haben alle diese Paare von Gliedern einerley arithmetisches Verhältniß.

8.

Betrachtet man die allgemeine wachsende Progression §. 3.

a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d ....

so bemerkt man, daß jedes auf das erste folgende Glied aus der Summe von a und einer Anzahl d besteht, welche der Zahl des Gliedes vom Anfange an gerechnet, gleich ist, weniger 1. So ist das zweyte Glied = a + (2 — 1) d = a + d; das dritte Glied = a + (3 — 1) d = a + 2d. Es würde daher das eilfte Glied gleich seyn a + (11 — 1) d = a + 10d.

Wenn daher die Progression allgemein aus n Gliedern bestehn sollte, so würde das nte oder letzte Glied = a + (n — 1) d seyn müssen.

Betrachtet man aber die allgemeine abnehmende Progression §. 3.

a, a — d, a — 2d, a — 3d, a — 4d, a — 5d, a — 6d ...

so bemerkt man, daß jedes Glied gleich ist dem ersten weniger einem Product aus d in die Zahl des Gliedes weniger 1. Es ist daher das fünfte Glied = a — (5 — 1) d = a — 4d, und das nte oder letzte Glied = a — (n — 1) d.

Ist daher das erste Glied einer wachsenden Reihe oder a = 2, die Differenz oder d = 5, so ist das

12te Glied

12 Glied $= 2 + (12 - 1)\,5 = 2 + 11 \cdot 5 = 2 + 55 = 57$. Und ist das erste Glied einer abnehmenden Progression oder $a = 57$, die Differenz oder $d = 5$, so ist das zwölfte Glied $= 57 - (12 - 1)\,5 = 57 - 11 \cdot 5 = 57 - 55 = 2$.

9.

Man hat aber bey jeder arithmetischen Progression auf vier Stücke zu sehen; diese sind:

1. Das erste Glied. Es sey $= a$.
2. Die Differenz, oder diejenige Größe, um welche jedes Glied nach dem ersten wächst oder abnimmt. Sie sey $= d$.
3. Die Anzahl der Glieder der Reihe. Sie sey $= n$
4. Das letzte Glied. Es sey $= l = a + (n - 1)d$. §. 8.

10.

Es ist gegeben das erste und letzte Glied einer zunehmenden Progression nebst der Differenz oder a, l und d; man soll bestimmen, aus wie viel Gliedern die Progression bestehen könne, oder man soll n bestimmen.

Weil der Ausdruck fürs letzte Glied die übrigen drey Stücke begreift, so kann man auch aus diesem Ausdruck ein jedes der drey übrigen Stücke herleiten.

Nun war das letzte Glied oder $l = a + (n - 1)d$ §. 8.

F. $l = a + nd - d$

F. $l - a + d = nd$

F. $\frac{l - a + d}{d} = n$

F. $\frac{l - a + d}{d} = \frac{l - a}{d} + 1$

F. $n = \frac{l - a}{d} + 1$, das

heißt: Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen steigenden Progression ist = der Summe aus 1 und dem Quotienten aus der Differenz zwischen dem letzten und ersten Gliede dividirt durch die Differenz der Reihe. Es sey z B $a = 2, l = 57$ und $d = 5$; so ist die Anzahl der Glieder oder

$$n = \frac{57-2}{5} + 1 = \frac{55}{5} + 1 = 11 + 1 = 12.$$

Probe. 2. 7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52. 57.

## Anmerkung.

1. Für fallende Reihen ist $l = a - (n-1)d$ §. 8.

oder $l = a - (nd - d)$

oder $l = a - nd + d$

F. $nd = a - l + d$

F. $n = \frac{a-l+d}{d}$

oder $n = \frac{a-l}{d} + 1$. Das heißt: Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen abnehmenden Progression ist gleich der Summe aus 1 und dem Quotienten aus der Differenz zwischen dem ersten und letzten Gliede dividirt durch die Differenz der Reihe. Wenn daher $a = 57$, $l = 2$, und $d = 5$; so ist die Anzahl der Glieder oder

$$n = \frac{57-2}{5} + 1 = \frac{55}{5} + 1 = 11 + 1 = 12.$$

2) Weil nun bey einer zunehmenden Reihe l das größte und a das kleinste, bey einer abnehmenden Reihe aber a das größte und l das kleinste Glied bezeichnet, so kann man die Formel für die Anzahl der Glieder allgemein so ausdrücken: Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Progression, sie sey wachsend oder abnehmend, ist gleich der Summe

aus

aus 1 und dem Quotienten aus der Differenz zwischen dem größten und kleinsten Gliede dividirt durch die Differenz der Progression.

Wenn daher das größte Glied = 60, das kleinste = 4 und die Differenz d = 8, so ist die Anzahl der Glieder oder

$$n = \frac{60-4}{8} + 1 = \frac{56}{8} + 1 = 7 + 1 = 8.$$

Probe. 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60.
oder 60, 52, 44, 36, 28, 20, 12, 4.

11.

Es ist gegeben das erste und letzte Glied einer wachsenden Progression nebst der Anzahl der Glieder oder a, l und n; man soll die Differenz oder d bestimmen.

Weil $l = a + (n-1)d$ §. 8.

so ist $l - a = (n-1)d$

F. $d = \frac{l-a}{n-1}$, das heißt: Die Differenz einer zunehmenden arithmetischen Reihe ist gleich dem Quotienten aus dem letzten Gliede weniger dem ersten, dividirt durch die Anzahl der Glieder weniger 1.

Anmerkung.

Für fallende Reihen findet man $d = \frac{a-l}{n-1}$. Man kann daher die Formel für die Differenz ganz allgemein auf beyde Arten von Reihen passend so ausdrücken: Die Differenz einer arithmetischen Progression ist gleich einem Bruch, dessen Zähler aus dem größten Gliede der Reihe weniger dem kleinsten, der Nenner aber aus der Anzahl der Glieder weniger 1 besteht.

Es sey das größte Glied (dies ist in einer zunehmenden Reihe das letzte und in einer abnehmenden das erste) = 57, das kleinste (dies ist in einer zunehmenden Reihe das erste, und in einer abnehmenden das letzte) = 2, die Anzahl der Glieder oder n = 12; so ist die Differenz oder $d = \frac{57 - 2}{12 - 1} = \frac{55}{11} = 5$.

12.

Es ist von einer zunehmenden Progression die Differenz, das letzte Glied und die Anzahl der Glieder oder d, l und n gegeben; man sucht das erste Glied oder a.

Weil $l = a + (n - 1)d$. (§. 8.)

so ist $a = l - (n - 1)d$; das heißt: das erste Glied einer zunehmenden arithmetischen Progression ist gleich dem letzten weniger dem Product aus der Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder.

Anmerkung.

1. Für abnehmende Progressionen findet man aus eben der Formel das erste Glied oder $a = l + (n - 1)d$ d. i. das erste Glied ist gleich dem letzten Gliede plus dem Product aus der Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder.

2. Weil a in einer wachsenden Reihe das kleinste, in einer abnehmenden das größte, l in einer wachsenden Reihe das größte, in einer abnehmenden das kleinste Glied bedeutet, so kann man allgemein auch so sagen: Das kleinste Glied einer jeden arithmetischen Progression ist allemahl gleich dem größten weniger dem Product aus der Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder; das größte aber gleich dem kleinsten Plus dem Product aus der Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder.

Es

Es sey das kleinste Glied = 2, die Differenz = 5, und die Anzahl der Glieder = 12, so ist das größte Glied = 2 + (12 − 1)5 = 2 + 11.5 = 2 + 55 = 57.

Und ist das größte Glied = 57, die Differenz = 5, die Anzahl der Glieder = 12, so ist das kleinste Glied = 57 − (12 − 1)5 = 57 − 11.5 = 57 − 55 = 2.

13.

## Recapitulation.

| In einer wachs. Reihe ist | In einer fallend. Reihe ist |
|---|---|
| $l = a + (n-1)d$. | $l = a - (n-1)d$. §. 8. |
| $n = \frac{l-a}{d} + 1$. | $n = \frac{a-l}{d} + 1$. §. 10. |
| $d = \frac{l-a}{n-1}$. | $d = \frac{a-l}{n-1}$. §. 11. |
| $a = l - (n-1)d$. | $a = l + (n-1)d$. §. 12. |

14.

Die Summen je zweyer Glieder einer jeden arithmetischen Progression, sie sey zunehmend oder abnehmend, welche gleich weit von den Enden abstehen, sind allemahl einander gleich.

Es sey die Progression 2, 7, 12, 17, 22, 27 . . . .

so ist $2 + 27 = 7 + 22 = 12 + 17$.

### Beweis.

Weil $2 - 7 = 22 - 27$. §. 7.

so ist $2 + 27 = 7 + 22$ (VII. §. 18.)

und weil $2 - 12 = 17 - 27$ §. 7.

so ist $2 + 27 = 12 + 17$. (VII. §. 18.)

vorhin war $2 + 27 = 7 + 22$

F. $2 + 27 = 7 + 22 = 12 + 17$. (II. §. 3.)

15.

15.

Nun ists leicht, die Summe aller Glieder einer jeden arithmetischen Progression zu bestimmen. Weil nemlich allemahl die Summe aus dem ersten und letzten Gliede gleich ist der Summe aus dem zweyten und vorletzten u. s. w. so darf man nur die Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder der Reihe multipliciren, so erhält man mit dem Product die Summe aller Glieder der Progression. So ist z. B. die Summe von

$2+7+12+17+22+27 = (2+27)\frac{6}{2} = 29.3 = 87.$

von $1+9+17+25+33 = \frac{(1+33)\cdot 5}{2} = \frac{35\cdot 5}{2} = 85.$

Oder wenn allgemein das erste Glied $= a$, das letzte $= l$, und die Anzahl der Glieder $= n$; so ist die Summe der ganzen Progression oder $S = (a+l)\frac{n}{2}$.

Weil aber das letzte Glied selbst auch aus dem ersten Gliede, der Differenz und der Anzahl der Glieder der Reihe bestimmt wird, so braucht man nur das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder der Progression $= n$ zu wissen, um die Summe aller Glieder der Reihe daraus zu bestimmen. Man darf nur in der Gleichung $S = (a+l)\frac{n}{2}$ anstatt l seinen Werth setzen.

Wenn also $S = (a+l)\frac{n}{2}$

$l = a+(n-1)d.$ §. 13.

---

so ist $S = (a+a+(n-1)d)\frac{n}{2}$. (II. §. 3.)

d. i. $S = (2a+nd-d)\frac{n}{2}$. d. i.

Die Summe einer wachsenden arithmetischen Progression ist gleich dem Product aus der halben Anzahl

Anzahl der Glieder in die Summe aus dem doppelten ersten Gliede und dem Product aus der Anzahl der Glieder in die gegebene Differenz weniger der Differenz.

Wenn daher das erste Glied oder $a = 2$, die Differenz oder $d = 5$, die Anzahl der Glieder oder $n = 12$, so ist

die Summe der ganz. Progr. $= (2.2 + 12.5 - 5)\frac{12}{2}$
$= (4 + 60 - 5)6$
$= 59 . 6 = 354.$

Probe.

Ist $a = 2, d = 5, n = 12$; so ist $l = 2 + (12 - 1)5.$
$= 2 + 11.5 = 57.$

Folglich $S = (a + l)\frac{n}{2} = (2 + 57)\frac{12}{2} = 59.6 = 354.$

16.

Für eine fallende Progression ist $S = (2a - (n-1)d)\frac{n}{2}.$

Beweis.

Allgemein war $S = (a + l)\frac{n}{2}$ §. 15.

$l = a - (n - 1)d$ §. 13.

---

F. $S = (a + a - (n-1)d)\frac{n}{2}$

$= (2a - (n-1)d)\frac{n}{2}$, d. i.

Die Summe einer arithmetischen abnehmenden Progression ist gleich dem Product aus der halben Anzahl der Glieder in die Differenz zwischen dem doppelten ersten Gliede und dem Product aus der gegebenen Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder.

Wenn daher das erste Glied oder $a = 57$, die Differenz oder $d = 5$, die Anzahl der Glieder oder $n = 12$, so ist die

die Summe der ganz. R. $= (2 \cdot 57 - (12-1)5)\frac{12}{2}$
$= (114 - 11.5)6 = 59.6 = 354.$

Probe.

Ist $a=57, d=5, n=12$, so ist $l = 57-(12-1)5 = 57-11.5$
$= 57 - 55 = 2.$ §. 13.

Folglich $S = (a+l)\frac{n}{2} = (57+2)\frac{12}{2}$ §. 15.
$= 59.6 = 354.$

## B.
## Von der geometrischen Progression.

### 17.

Nach VII. §. 56. findet man zu zwey Größen die dritte geometrische Proportionalgröße, wenn man das Quadrat der zweyten durch die erste dividirt. Wenn daher das erste Glied $= a$, das zweyte $= am$, so ist das dritte $= \frac{a^2m^2}{a} = am^2$. Multiplicirt man nun das erhaltene dritte Glied wieder in m, so bekommt man $am^3$ und zusammen vier geometrische Proportionalgrößen, nemlich a, am, $am^2$, $am^3$. Durch fortgesetzte Multiplication der jedesmaligen letzten Größe in den Exponenten m kann man so viel continuirliche Proportionalgrößen erhalten, als man will. Es hat dann jede Größe zur unmittelbar vorhergehenden immer dasselbe Verhältniß. Eine Reihe solcher Größen, von welchen allemahl zwey benachbarte einerley geometrisches Verhältniß haben, nennt man eine geometrische Progression.

Es kann aber m oder der Exponent der Reihe entweder eine ganze Zahl, die aber größer als 1 seyn muß, oder einen unächten oder ächten Bruch bedeuten. In den beyden ersten Fällen erhält man

eine

eine steigende oder wachsende Reihe, weil hier die folgenden Glieder immer größer werden, als das vorhergehende; im dritten Fall aber eine fallende oder abnehmende Reihe, weil die folgenden Glieder immer kleiner werden. Wenn daher $a = 2$, $m = 3$ oder $1\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, so sind

$$2, 2\cdot3, 2\cdot3^2, 2\cdot3^3, 2\cdot3^4, 2\cdot3^5 \ldots$$

oder $2, 6, 18, 54, 162, 486 \ldots$ } steigende

und $2, 2\cdot\frac{3}{2}, 2\cdot(\frac{3}{2})^2, 2\cdot(\frac{3}{2})^3, 2\cdot(\frac{3}{2})^4 \ldots$ } Reihen.

oder $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8} \ldots$

Ist aber $a = 2$, $m = \frac{1}{2}$, so ist

$$2, 2\cdot\tfrac{1}{2}, 2\cdot(\tfrac{1}{2})^2, 2\cdot(\tfrac{1}{2})^3, 2\cdot(\tfrac{1}{2})^4 \ldots$$

oder $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ eine fallende R.

18.

Drey unmittelbar auf einander folgende Glieder einer geometrischen Progression machen eine continuirliche geometrische Proportion. Dies folgt aus dem Begriff einer geometrischen Progression §. 17.

Wenn daher die Reihe $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$ so ist allemahl $1 : 2 = 2 : 4$.

$2 : 4 = 4 : 8$.

$16 : 32 = 32 : 64$.

19.

Aber auch drey Glieder einer geometrischen Progression, die um gleichviel Glieder von einander abstehen, machen eine continuirliche geometrische Proportion. Daher ist

$1 : 4 = 4 : 16$.

Beweis.

$1 : 2 = 2 : 4$ } §. 18.

und $2 : 4 = 4 : 8$ }

2) F. $2 : 8 = 8 : 32$ (VII. §. 33.)

F. $1 : 4 = 4 : 32$. (VII. §. 32. c.)

20.

20.

Vier unmittelbar auf einander folgende Glieder einer geometrischen Progression machen eine discrete geometrische Proportion Denn nach dem Begriff einer geometrischen Progression hat jedes Glied zu seinem nächst vorhergehenden Gliede dasselbe geometrische Verhältniß, daher ist

$$1 : 2 = 4 : 8$$
$$\text{und } 8 : 16 = 32 : 64.$$

21.

Aber auch jedes Paar Glieder einer geometrischen Progression, welche gleich weit von einander abstehen, hat einerley geometrisches Verhältniß.

z. B. $1 : 8 = 4 : 32.$

Beweis.

$1 : 2 = 4 : 8$ §. 20.
$2 : 4 = 4 : 8$ §. 18.

---

F. $2 : 8 = 16 : 64$ (VII. 33.)

---

und [2] $1 : 8 = 8 : 64$ (VII. §. 32. c.)

---

und [2] $1 : 8 = 4 : 32$ (VII. §. 32. b.)

Auch bemerkt man an der Proportion $1 : 8 = 4 : 32$ das Kennzeichen einer geometrischen Proportion. VII. §. 27.

22.

Betrachtet man die allgemeine Progression

$a, am, am^2, am^3, am^4\ am^5, am^6, am^7, am^8 \ldots\ldots$

so bemerkt man, daß die Dignität des Exponenten der Progression allemahl gleich ist der Zahl des Gliedes weniger 1. So ist im zweyten Gliede m in der Potenz $2 - 1$, d. i. in der Potenz 1; im dritten Gliede ist m in der Potenz $3 - 1$, d. i. in der Potenz 2 u. s. w. Wenn daher die Reihe aus n Gliedern bestün-

bestünde, so würde das nte oder letzte Glied gleich seyn $am^{n-1}$.

23.

Die Producte je zweyer von beyden Enden gleich weit entfernter Glieder einer geometrischen Progression sind immer einander gleich. Wenn daher die Progression

$$a, am, am^2, am^3, am^4, am^5.$$

so ist $a \cdot am^5 = am \cdot am^4 = am^2 \cdot am^3 = a^2m^5$.

Beweis.

Weil $a : am = am^4 : am^5$. §. 21.

so ist $a \cdot am^5 = am \cdot am^4$. (VII. §. 27.)

Und weil $am : am^2 = am^3 : am^4$ §. 20.

so ist auch $am \cdot am^4 = am^2 : am^3$ (VII. §. 27.)

vorhin war $a \cdot am^5 = am \cdot am^4$

F. $a \cdot am^5 = am^2 \cdot am^3 = am \cdot am^4$ (VII. §. 9.)

24.

Sind aber die Producte je zweyer von den Enden gleich weit entfernter Glieder einander gleich, so kann man für jedes dieser Producte das Product aus dem ersten Gliede ins letzte setzen. Nun war allgemein das letzte Glied $= am^{n-1}$ §. 22, also ist auch allgemein jedes Product zweyer von den Enden gleich weit entfernter Glieder $= a^2 \cdot m^{n-1}$.

25.

Setzt man das letzte Glied allgemein $= 1$, so ist $1 = am^{n-1}$. Hieraus läßt sich das erste Glied oder a finden. Denn wenn

$$1 = am^{n-1}$$

so ist $a = \frac{1}{m^{n-1}}$.

Wenn daher das letzte Glied, der Exponent und die Anzahl der Glieder der Reihe bekannt ist, so darf man nur das letzte Glied durch eine Potenz des Exponenten dividiren, welche der um 1 verminderten Anzahl der Glieder gleich ist, um das erste Glied zu finden. Es sey $l = 135$, $m = 3$, und $n = 4$, so ist $a = \frac{135}{3^{4-1}} = \frac{135}{3^3} = \frac{135}{27} = 5$.

## 26.

Sollte man die Summe einer aus vielen Gliedern bestehenden endlichen Progression bestimmen, so würde dies, wenn man auf gewöhnliche Art die gleichnahmigen Ziefern der Glieder addiren wollte, sehr mühsam seyn. Bequemer wäre es, wenn sich aus einigen Datis der Reihe die Summe ihrer Glieder berechnen ließe.

Da jedes Glied einer geometrischen Progression zum unmittelbar vorhergehenden einerley Verhältniß hat §. 17., so hat auch umgekehrt jedes Glied zum nächstfolgenden dasselbe Verhältniß. Man bringe also die beyden ersten Glieder der allgemeinen Progression in ein Verhältniß, dann das zweyte und dritte, das dritte und vierte u. s. w. und addire die gleichnahmigen Glieder dieser Verhältnisse:

Wenn also $a : am$
$am : am^2$
$am^2 : am^3$
$am^3 : am^4$

so ist $a + am + am^2 + am^3 : am + am^2 + am^3 + am^4 = a : am$
(VII. §. 11.)

Es

Es ist aber $a + am + am^2 + am^3 =$ der Summe aller Glieder weniger dem letzten.

und $am + am^2 + am^3 + am^4 =$ der Summe aller Glieder weniger dem ersten.

Setzt man nun die Summe $= S$, das letzte Glied $= l$; so ist

$a + am + am^2 + am^3 : am + am^2 + am^3 + am^4 = S - l : S - a$.

Es war aber $a + am + am^2 + am^3 : am + am^2 + am^3 + am^4 = a : am$

Folglich $S - l : S - a = a : am$. (VII. §. 45.)

Folgl. auch $S - l : (S + a) - (S - l) = a : am - a$. (VII. §. 30. b.)

oder $S - l : S - a - S + l = a : am - a$.

d. i. $S - l : l - a = a : am - a$.

F. $(S - l)(am - a) = (l - a)a$ (VII. §. 27.)

oder $Sam - Sa - alm + al = al - a^2$.

F. $Sam - Sa = alm - al + al - a^2$

d. i. $Sam - Sa = alm - a^2$.

F. $S = \frac{alm - a^2}{am - a} = \frac{lm - a}{m - 1}$; weil aber allgemein $l = am^{n-1}$ §. 25.

so ist $S = \frac{am^{n-1} \cdot m - a}{m - 1} = \frac{am^n - a}{m - 1}$, das heißt:

Die Summe einer endlichen geometrischen Progression ist gleich dem Quotienten aus der Differenz zwischen dem Product aus dem ersten Gliede in den Exponenten der Reihe, dessen Potenz gleich der Anzahl der Glieder, und zwischen dem ersten Gliede dividirt durch den um 1 verminderten Exponenten der Reihe.

Es sey z. B. das erste Glied oder a = 2, der Exponent oder m = 5, die Anzahl der Glieder oder n = 10, so ist

$$S = \frac{2.5^{10}-2}{5-1} = \frac{2.9765625-2}{4} = \frac{19531250-2}{4} = \frac{19531248}{4} = 4882812.$$

## Anmerkung.

Diese Formel ist allgemein, und dient also auch zur Bestimmung der Summe endlicher fallender Reihen. Es sey z. B. a = 160. m = $\frac{1}{2}$ und n = 5, so ist

$$S = \frac{160.(\frac{1}{2})^5-160}{\frac{1}{2}-1} = \frac{160.\frac{1}{32}-160}{-\frac{1}{2}} = \frac{5-160}{-\frac{1}{2}} = \frac{-155}{-\frac{1}{2}} = 310.$$

27.

Bisher war die Rede von endlichen geometrischen Reihen, d. i. von solchen, die nur aus einer bestimmten Anzahl Glieder bestanden. Man sieht aber leicht, daß man jede geometrische Reihe in infinitum verlängern könne, wenigstens kann man sie in Gedanken sich so vorstellen, denn man könnte ja das jedesmalige letzte Glied immer wieder von neuen in den Exponenten multipliciren, da denn, wenn der Exponent größer ist als 1, das folgende Glied immer größer ausfallen würde, als das vorhergehende, wäre aber der Exponent kleiner, als 1, so könnte man ja doch das jedesmalige letzte Glied, z. B. das tausendste, noch einmahl theilen, und so auch wieder das tausend und erste, und so in infinitum fort, da denn freylich diese letzten Glieder gegen das erste nothwendig unendlich klein ausfallen müßten.

Ein Beyspiel von unendlich fallenden Progressionen giebt die Methode (V. §. 58 u. 59.) den Werth eines

eines Bruchs durch eine unendliche Reihe Brüche auszudrucken. Eine solche Reihe ist allemahl eine geometrische und zwar fallende Reihe, deren Glieder entweder insgesammt durch das Pluszeichen, wie V. §. 59., mit einander verbunden sind; oder die positiven Glieder wechseln mit negativen ab, so daß alle ungeraden Glieder positiv, die geraden aber negativ sind. Und darüber darf man sich auch nicht wundern; denn wenn das erste Glied, wie allemahl, positiv, der Exponent aber negativ ist, so muß ja nothwendig das zweyte Glied, als ein Product aus dem positiven ersten Gliede in den negativen Exponenten negativ ausfallen (V. §. 20); das dritte Glied aber wird, als ein Product aus dem negativen zweyten Gliede in den gleichfalls negativen Exponenten nothwendig wieder positiv ausfallen müssen. (V. §. 21.) u. s. w.

Es fragt sich nun, ob man auch die Summe von dergleichen unendlichen Reihen bestimmen könne? Die Antwort kann nicht anders als verneinend ausfallen. Denn da man schlechterdings im eigentlichen Verstande keine Reihe in infinitum erhalten kann, weil man sonst auf ein letztes Glied kommen müßte; eine Progression aber, sie sey auch noch so lang, die ein letztes Glied hat, ist keine unendliche Progression. Man kann aber doch auf andere Art, als durchs Addiren, die Summe einer wirklich unendlichen Reihe bestimmen, wenn nemlich von fallenden geometrischen Reihen die Rede ist. Die Formel aber zur Berechnung der Summe einer solchen unendlichen fallenden Reihe kann man folgendergestalt finden.

28.

1. Wenn die Glieder der unendlich fallenden Reihe insgesammt positiv sind.

Es sey die Reihe V. §. 59. $\frac{a}{m} + \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} + \frac{an^3}{m^4} + \frac{an^4}{m^5} \ldots\ldots$

Setzt man $\frac{a}{m} = a$, so wird

daraus folgende Reihe $a + \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3} + \frac{an^4}{m^4} \ldots\ldots$

Folglich $S = a + \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3} + \frac{an^4}{m^4} \ldots\ldots$

diese Reihe in

$\frac{n}{m}$ multiplicirt $\frac{Sn}{m} = \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3} + \frac{an^4}{m^4} + \frac{an^5}{m^5}$ .. II. §. 12.

F. $S - \frac{Sn}{m} = a$. II. §. 8.

oder $\frac{Sm - Sn}{m} = a$

F. $S = \frac{a}{\frac{m-n}{m}} = \frac{am}{m-n}$, d. i.

Die Summe einer unendlich fallenden Reihe, deren Glieder alle positiv sind, ist gleich dem Quotienten aus dem Produkt des ersten Gliedes in den Nenner des Exponenten dividirt durch die Differenz zwischen dem Nenner und Zähler des Exponenten.

So war V. §. 59. das erste Glied oder $a = \frac{5}{10}$, der Exponent oder $\frac{n}{m} = \frac{1}{5}$, es ist daher

$S = \frac{\frac{5}{10} \cdot 5}{5-1} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8}$ dem verwandelten Bruch.

Ferner von $16 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \ldots\ldots$ ist

$S = \frac{16 \cdot 4}{4-1} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$.

29.

2. Wenn die Glieder der unendlichen Reihe abwechselnd positiv und negativ sind.

Man nehme die Reihe (V. §. 58.) $\frac{a}{m} - \frac{an}{m^2} + \frac{an^2}{m^3} - \frac{an^3}{m^4} \ldots$

Setzt man auch hier a anstatt $\frac{a}{m}$, so wird daraus

diese Reihe $a - \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^2} - \frac{an^3}{m^3} + \frac{an^4}{m^4} + \frac{an^5}{m^5} \ldots$

Folgl. $S = a - \frac{an}{m} + \frac{an^2}{m^2} - \frac{an^3}{m^3} + \frac{an^4}{m^4} - \frac{an^5}{m^5} \ldots$ diese in $\frac{n}{m}$ multipl.

giebt $\frac{Sn}{m} = \frac{an}{m} - \frac{an^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3} - \frac{an^4}{m^4} + \frac{an^5}{m^5} \ldots$

F. $S + \frac{Sn}{m} = a.$

F. $S + \frac{Sn}{m} = \frac{Sm + Sn}{m} = S. \frac{m+n}{m}$

F. $S. \frac{m+n}{m} = a$

F. $S. = \frac{a}{\frac{m+n}{m}} = \frac{am}{m+n}$, d. i.

Die Summe einer fallenden unendlichen Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, ist gleich dem Quotienten aus dem Product des ersten Gliedes in den Nenner des Exponenten dividirt durch die Summe aus dem Zähler und Nenner des Exponenten der Reihe.

So war V. §. 60. $a = \frac{3}{5}$, $\frac{n}{m} = \frac{1}{5}$. Es ist daher

$S = \frac{\frac{3}{5} \cdot 5}{5+1} = \frac{3}{6} =$ dem verwandelten Bruch.

Ferner von $25 - 5 + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \frac{1}{625} - \frac{1}{3125} \ldots$ ist

$S = \frac{25 \cdot 5}{5+1} = \frac{125}{6} = 20{,}83333 \ldots$

## Anmerkung.

Von zunehmenden unendlichen Reihen läßt sich die Summe nicht berechnen, welches auch bey Betrachtung derselben sogleich einleuchtet.

— 30.

Den Nutzen dieser unendlichen Reihen im bürgerlichen Leben zeigt unter andern die Berechnung des Rabatts, d. i. des Unterschiedes zwischen einem auf Zeit zahlbaren Capital, und dessen Werth, wenn die Zahlung sogleich baar geleistet werden soll, deren Erfinder nach den Actis erudit. Lipf. vom Monath October 1683 Leibnitz ist.

A ist an B, nach Verlauf eines Jahres, 100000 thl. zu zahlen schuldig.

Zahlt nun A sogleich, so muß ihm B am Ende des Jahrs den Gewinn, den A hätte machen können, herausgeben, dieser Gewinn ist zu 5 p. C. gerechnet $= \frac{100000}{20}$ rthlr.

Will aber A diese $\frac{100000}{20}$ sogleich abziehen, und nur $100000 - \frac{100000}{20}$ zahlen, so bekommt B zu wenig, weil B die $\frac{100000}{20}$ erst am Ende des Jahrs zu zahlen verbunden war.

(Denn wenn A nur $100000 - \frac{100000}{20} = 95000$ thl. zahlt, so kann ja B nicht 5000 rthlr. damit gewinnen, sondern nur $\frac{25000}{20} = 4750$, also 250 d. i. $\frac{100000}{20.20}$ weniger.)

A muß also am Ende Jahrs diese $\frac{100000}{20.20}$ zahlen; thut er es aber sogleich und zahlt $100000 - \frac{100000}{20} + \frac{100000}{400}$; so thut er wieder Verzicht auf den jährlichen Gewinn von diesen $\frac{100000}{400}$ rthlr., dieser Gewinn ist

zu $\frac{1}{20}$ p. C. gerechnet $= \frac{100000}{8000}$; daher kann A diesen Gewinn wieder abziehen. Weil er aber doch demselben erst am Ende des Jahrs hätte machen können, ihn aber sogleich von der Summe abzieht, so muß er den Verlust, den B sonst leiden würde, mit den jährlichen Interessen von $\frac{100000}{8000}$, nemlich mit $\frac{100000}{160000}$ ersetzen, das heißt, er kann sogleich $100000 - \frac{100000}{20} + \frac{100000}{400} - \frac{100000}{8000} + \frac{100000}{160000}$ u. s. w. in infinitum zahlen.

Will also A, anstatt nach einem Jahre 100000 thl. zu zahlen, sich sogleich mit B, ohne beyderseits Schaden zu leiden, aus einander setzen, so muß er den Ertrag der Summe dieser unendlichen Reihe, deren Exponent $\frac{1}{20}$, das erste Glied aber 100000 ist, zahlen. Es ist aber

$$S = \frac{100000 \cdot 20}{20 + 1} = \frac{2000000}{21} = 95238\frac{2}{21} \text{ rthlr.}$$

Folglich beträgt der Rabatt, der dem A wegen früherer Zahlung zu Gute kommt $4761\frac{19}{21}$ thlr.

## Anmerkung.

Da der Gewinn zu 5 p. C. den B mit seinen erhaltenen $95238\frac{2}{21}$ rthlr. in dem Jahre machen kann, ebenfalls $\frac{95238\frac{2}{21}}{20}$, d. i. $4761\frac{19}{21}$ rthlr. beträgt, so ist dies ein Beweis für die Richtigkeit dieser Leibnitzischen Methode, das Interusurium zu berechnen.

## 31.

Ist $a = 1$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{20}$, so ist $\frac{am}{m+n} = \frac{1 \cdot 20}{20 + 1} = \frac{20}{21} =$

$1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000} \ldots\ldots$

(V. §. 58.)

Beweis,

daß $\frac{20}{21} = 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000} \cdots$

$\frac{20}{21} \cdot 21 = 20$. (II. § 19.)

u. $(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000})21 = 20$.

Ist nun das 21fache einander gleich, so müssen ja auch die einfachen Größen einander gleich seyn.

Man multiplicire $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000} \cdots$ in 20

so ist das 20fache $= 20 - 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} - \frac{1}{160000} \cdots$

hiezu das 1fache $= + 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} \cdots$

F. das 21fache $= 20$.

Es ist also $\frac{am}{m + n}$ eine allgemeine Formel zu Berechnung des Interusurium.

Bey 4 p. C. Rabatt ist $\frac{n}{m} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

Bey 6 p. C. Rabatt ist $\frac{n}{m} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$.

Ein Capital von 4000 rthlr. über 1 Jahr zahlbar macht, wenn es sogleich baar bezahlt wird, zu 4 p. C. Rabatt, $\frac{4000 . 100}{100 + 4} = \frac{400000}{104} = 3846\frac{2}{13}$ rthl. folglich beträgt der Rabatt auf die ganze Summe $153\frac{1}{13}$ rthlr.

Von demselben Capital, zu 6 p. C. Rabatt gerechnet, beträgt die baare Zahlung $\frac{4000 . 00}{100 + 6} = \frac{400000}{106} = 3773\frac{3}{5}\frac{1}{3}$ rthlr., und der Rabatt auf die ganze Summe ist $= 226\frac{2}{5}\frac{2}{3}$ rthlr.

## II.

## Von den Logarithmen.

### 32.

Verbindet man die Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied = 0, die Differenz = 1, mit den gleichnahmigen Gliedern einer geometrischen Progression, so zeigen die Glieder der ersten Progression die Anzahl der Verhältnisse an zwischen den Gliedern der andern Reihe vom ersten Gliede an gerechnet. Wenn daher

die geom. Reihe 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256....
die arithm. R. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8....

so zeigt 1 der arithmetrischen Reihe an, daß die Glieder 1 und 2 das erste Verhältniß der geometrischen Reihe ausmachen; 5 in der arithmetrischen Reihe, daß zwischen dem ersten und dem correspondirenden Gliede 32 der geometrischen Reihe fünf Verhältnisse statt finden, nemlich: 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8, 8 : 16 und 16 : 32.

### 33.

Man nennt daher die Glieder der arithmetischen Reihe die Verhältnißzahlen oder Logarithmen (λογων ἀριθμοι) von den gleichnahmigen Gliedern der geometrischen Reihe. Es sind also die Logarithmen nichts anders, als die Glieder einer arithmetischen Reihe, die sich auf gleichnahmige Glieder einer geometrischen Reihe beziehen. So ist das vierte Glied der arithmetischen Reihe oder 3 der Logarithme des eben so vielsten Gliedes der geometrischen Reihe oder der Logarithme von 8, das neunte Glied der

arith-

arithmetrischen Reihe der Logarithme desselben Gliedes der geometrischen Reihe.

Anmerkung.

Die geometrische Reihe kann mit jeder andern Zahl anfangen und auch jede andere Zahl zum Exponenten haben. Bey der arithmetischen Reihe aber muß das §. 32. angeführte Gesetz statt finden, wenn man mit den Gliedern derselben die Verhältnisse zwischen dem ersten und jeden andern Gliede der geometrischen Reihe bequem abzählen will, ob es gleich sonst bey einer andern Vorstellung von der Sache nicht nothwendig wäre.

34.

Druckt man das zweyte und die folgenden Glieder der geometrischen Reihe durchs erste Glied aus, multiplicirt in eine Potenz des Exponenten, und setzt die Glieder der arithmetischen Reihe darunter folgendergestalt

Geom. R. $2^0$ oder $1, 1.2^1, 1.2^2, 1.2^3, 1.2^4, 1.2^5, 1.2^6, 1.2^7 \ldots$
Arithm. R. $0, 0+1, 0+2, 0+3, 0+4, 0+5, 0+6, 0+7 \ldots$

oder

$1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10} \ldots$
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots$

so bemerkt man, daß die Zahlen der Differenzen der arithmetischen Reihe und die Exponenten der correspondirenden Glieder der geometrischen Reihe dieselben sind.

35.

Behandelt man daher die Glieder der arithmetischen Reihe so, wie die Exponenten gleichnahmiger Potenzen, so muß man auch dasselbe Resultat erhalten, wie beym Addiren, Subtrahiren, Multipliciren

ciren und Dividiren der Potenzen. Denn im ersten Fall erhält man das Product (V. §. 28.), im andern den Quotienten (V. §. 61.) gleichnahmiger Potenzen, im dritten eine höhere Dignität (V. §. 31.), und im vierten die Wurzel aus einer Potenz (VI. §. 44.). Dadurch aber wird das mühsame Multipliciren in Addiren, das Dividiren in Subtrahiren, und das Ausziehen der Wurzel in das leichtere Dividiren verwandelt. Ich will jetzt diese Vortheile an einem eigenen Logarithmensystem zeigen. Der Exponent der geometrischen Reihe mag 3 seyn.

| | |
|---|---|
| 1. | 0. |
| 3 | 1. |
| 9 | 2 |
| 27. | 3. |
| 81. | 4 |
| 243 | 5 |
| 729 | 6 |
| 2187 | 7 |
| 6561. | 8 |
| 19683 | 9 |
| 59049 | 10 |
| 177147 | 11 |
| 531441 | 12 |
| 1594323 | 13 |
| 4782969 | 14 |
| 14348907 | 15 |
| 43046721 | 16 |
| 129140163 | 17 |
| 387420489 | 18 |
| 1162261467 | 19 |
| 3486784401 | 20 |

Logarithmen der daneben stehenden Zahlen.

36.

Vier unmittelbar auf einander folgende oder gleichweit von einander abstehende Glieder einer arithmetischen und geometrischen Progression stehen allemahl in Proportion nach §. 6, 7, 20 und 21. Hieraus folgt, daß sich die Logarithmen solcher Zahlen, die in geometrischer Proportion stehen, allemahl in einer arithmetischen Proportion befinden müssen.

Wenn daher 9 : 729 = 243 : 19683

so ist auch log. 9 : log. 729 = , log. 243 : log. 19683

Es ist aber log. 9 = 2, l. 729 = 6, log. 243 = 5, log. 19683 = 9

F. ist auch 2 — 6 = 5 — 9.

37.

Weil das letzte Glied einer arithmetischen Proportion gleich ist der Summe der beyden mittlern Glieder weniger dem ersten, so findet man das vierte Glied einer geometrischen Proportion, wenn man von der Summe der Logarithmen der beyden mittlern Glieder den Logarithmus des ersten Gliedes abzieht, und dann die Zahl aufsucht, die zu dem bleibenden Rest gehört. Wollte man daher die vierte geometrische Proportionalzahl zu 9, 81 und 2187 wissen, so dürfte man nur schließen:

9 : 81 = 2187 : x

oder log. 9 — log. 81 = log. 2187 — log. x.

F. log. x = log. 2187 + log. 81 — log. 9. Es ist

aber log. 2187 = 7

log. 81 = 4

log. 9 = 2

F. log. x = 7 + 4 — 2 = 9

9 = log. 19683

F. x = 19683.

Sucht

Sucht man auf gewöhnliche Art die vierte Proportionalzahl zu 9, 81 und 2187, so findet man gleichfalls 19683; denn 2187

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline 2187 \\ 17496 \\ \hline 9\ :)\ 177147 \\ \hline 19683 \end{array}$$

Man sieht hieraus den Vortheil, den die Logarithmen im Rechnen verschaffen.

38.

Der Logarithme eines Products ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren, woraus das Product besteht; denn jedes Product ist allemahl quarta geometrice proportionalis zur Einheit, zum Multiplicandus und zum Multiplicator. Wenn daher der eine Factor $=$ a, der andere $=$ b, so ist

$$1 : a = b : a \cdot b$$

F. $\log. a \cdot b = \log. b + \log. a - \log. 1.$ §. 37.

$\log. 1 = 0.$ §. 35.

F. $\log. ab = \log. a + \log. b.$

Sucht man daher die Zahl, die zu dem Logarithmus der Summe der Logarithmen beyder Factoren gehört, auf, so erhält man das Product der beyden Factoren.

Man würde also das Product aus 19683 in 177147 folgendergestalt sehr leicht finden.

log.

log. 19683 = 9
log. 177147 = 11

F. log. 19683 . 177147 = 9 + 11 = 20.
20 = log. 3486784401.

F. 19683 . 177147 = 3486784401.

Gleiche Bewandniß hat es, wenn mehr, als zwey, Factoren in einander multiplicirt werden sollen. Man addirt nemlich ihre Logarithmen und sucht die zur Summe der Logarithmen der Factoren gehörige Zahl auf, so erhält man das Product der Factoren.

So ist z. B. log. 243 = 5
log. 729 = 6.
log. 6561 = 8

F. log. 243 . 729 . 6561 = 5 + 6 + 8 = 19.
19 = log. 1162261467.

F. 243 . 729 . 6561 = 1162261467.

39.

Der Logarithmus einer Quadratzahl ist gleich dem doppelten Logarithmus der Wurzel, daher ist die Zahl, die zu diesem doppelten Logarithmus gehört, das Quadrat der Wurzel. Wenn daher die Wurzel = a, so ist das Quadrat = a in a = $a^2$.

Nun ist log. a . a = log. a + log. a §. 38.
log. a + log. a = 2 log. a.

Folglich log. $a^2$ = 2 log. a.

Man soll die Zahl 19683 ins Quadrat erheben.

Weil log. 19683 = 9. §. 35.

so ist log. $19683^2$ = 2 . 9 = 18
18 = log. 387420489. §. 35.

Folgl. $19683^2$ = 387420489.

40.

40.

Der Logarithmus der Quadratwurzel ist gleich dem halben Logarithmus des Quadrats; daher ist die Zahl, die zum halben Logarithmus des Quadrats gehört, die Wurzel aus der gegebenen Quadratzahl. Denn weil

$$\log. a^2 = 2 \log. a \quad \text{§. 39.}$$

so ist auch $\frac{\log. a^2}{2} = \frac{2 \log. a}{2} = \log. a.$ (II. §. 15.)

Man soll z. B. die Quadratwurzel ziehen aus der Zahl 531441.

Weil $\log. 531441 = 12.$ §. 35.

so ist $\frac{1}{2} \log. 531441 = 6$

$6 = \log.$ §. 35.

Folglich $\sqrt{531441} = 729.$

41.

Der Logarithmus einer Cubiczahl ist gleich dem dreyfachen Logarithmus der Wurzel; die Zahl also, die zu dem dreyfachen Logarithmus der Wurzel gehört, ist die Cubiczahl selbst. Denn wenn die Wurzel $= a$, so ist die Cubicgröße $= a. a. a = a^3.$

Nun ist $\log. a. a. a = \log. a + \log. a + \log. a.$ §. 38.

$\log. a + \log. a + \log. a = 3 \log. a.$

Folglich $\log. a^3 = 3 \log. a.$

Man soll die Zahl 729 in die dritte Dignität erheben.

Weil nun $\log. 729 = 6.$ §. 35.

so ist $\log. 729^3 = 3. 6 = 18$

$18 = \log. 387420489.$

Folglich $729^3 = 387420489.$

42.

Der Logarithmus der Cubicwurzel ist gleich dem dritten Theil vom Logarithmus der Cubiczahl; daher ist die Wurzel einer Cubiczahl gleich der Zahl, die zum dritten Theil des Logarithmen der Cubiczahl gehört. Denn weil

$$\log. a^3 = 3 \log. a. \quad \text{§. 41.}$$

so ist auch $\frac{\log. a^3}{3} = \frac{3 \log. a}{3} = \log. a.$ (II. §. 15.)

Man soll die Cubicwurzel ziehen aus der Zahl 14348907.

Weil $\log. 14348907 = 15.$ §. 35.

so ist auch $\frac{\log. 14348907}{3} = 5.$ (II. §. 15.)

$$5 = \log. 243.$$

Folglich $\sqrt[3]{14348907} = 243.$

Anmerkung.

Man sieht hieraus von selbst, wie man zu verfahren habe, wenn man vermittelst der Logarithmen eine Zahl zu noch höhern Dignitäten erheben, oder höhere Wurzeln ausziehen soll.

43.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividendus weniger dem Logarithmus des Divisors. Sucht man daher die Zahl, die zu dem Logarithmus dieser Differenz gehört, so erhält man mit derselben den Quotienten der beyden Zahlen. Denn jeder Quotient ist die vierte geometrische Proportionalzahl zum Divisor, zum Dividendus und zur Einheit. Wenn daher der Divisor $= a$, der Dividendus $= b$, so ist

a : b

$a : b = 1 : \frac{b}{a}$.

F. $\log. a - \log. b = \log. 1 - \log. \frac{b}{a}$ §. 37.

F. $\log. \frac{b}{a} = \log. 1 + \log. b - \log. a.$

$\log. 1 = 0.$ §. 35.

F. $\log. \frac{b}{a} = \log. b - \log. a.$

Man soll 129140163 durch 19683 dividiren.

$\log. 129140163 = 17.$

$\log. 19683 = 9$

F. $\log. 129140163 - \log. 19683 = 17 - 9 = 8$

$8 = \log. 6561$

F. $\frac{129140163}{19683} = 6561.$

44.

Da jeder Bruch dem Ausdruck nach als ein Quotient betrachtet werden kann, so erhält man den Logarithmen eines Bruchs, wenn man den Logarithmen des Nenners, als des Divisors, vom Logarithmus des Zählers, als des Dividendus, abzieht. Weil aber bey ächten Brüchen der Zähler allemahl kleiner ist, als der Nenner, (III. §. 48), so ist auch der Logarithmus des Zählers allemahl kleiner, als der Logarithmus des Nenners, und folglich erscheint der Logarithmus eines ächten Bruchs allemahl als eine negative Größe. So ist

z. B. $\log. \frac{2}{27} = \log. 2 - \log. 27.$ §. 43.

$\log. 2 = 1$
$\log. 27 = 3$ } §. 35.

F. $\log. \frac{2}{27} = 1 - 3 = -1.$

45.

Man kann hieraus sehen, daß die Logarithmen wirklich ungemeine Bequemlichkeit und Vortheile im Rechnen verschaffen würden, wenn man die Logarithmen aller nur möglichen Zahlen hätte. Bleiben wir aber bey dem logarithmischen System §. 35. stehen, so fällt die Unvollständigkeit desselben gleich beym ersten Anblick in die Augen. Denn hier fallen zwischen der Zahl, deren Logarithmus 0 ist, und zwischen der Zahl, deren Logarithmus 20 ist, viele Millionen Zahlen, die keinen Logarithmen haben, und man kann daher schon z. B. nicht einmahl das Product von 244 in 728 logarithmisch berechnen, weil man die Logarithmen dieser Zahlen nicht weiß. Und diese Mängel hat jedes andere, und selbst das gewöhnliche Briggische Logarithmen-System, bey welchem das Verhältniß 1:10, als das einfache zum Grunde gelegt und damit die arithmetische Reihe, deren erstes Glied = 0, und die Differenz = 1 ist, verbunden worden. Dadurch bekommt man folgende Reihe:

G.R. 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000..
A.R. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. ...

Das Mangelhafte ist hier noch in die Augen fallender als bey dem System §. 35. Denn hier haben ungleich mehr Zahlen, nemlich 2 bis 9, 11 bis 99, 101 bis 999 u. s. w. keinen Logarithmen. So viel aber giebt doch schon ein geringes Nachdenken, daß die Logarithmen der Zahlen 2 bis 9 größer seyn müssen, als 0, und kleiner, als 1, das heißt: die Logarithmen dieser acht Zahlen müssen ächte Brüche seyn.

Ferner

Ferner die Logarithmen der Zahlen 11 bis 99 müssen wieder größer seyn als 1, und kleiner als 2, das heißt: die Logarithmen dieser 89 Zahlen müssen 1 mit einem ächten Bruch seyn.

Eben so müssen die Logarithmen der Zahlen 101 bis 999 seyn 2 mit einem ächten Bruch.

Es kommt also nur darauf an, diese Brüche zu finden. Man muß aber gleich Anfangs merken, daß sich selbst diese Brüche nicht genau ausdrücken lassen, wenn man auch noch so große Zahlen nehmen wollte. Man hat daher den Werth dieser Brüche in den gewöhnlichen Tafeln bis auf sieben Decimalstellen, außer der so genannten Karakteristik, d. i. die ganze Zahl, welche der Logarithme enthält, berechnet, und dabey ging man folgendergestalt zu Werke.

46.

Man theilt die Zahlen ein in solche, die man als Producte kleinerer Zahlen betrachten kann, und in solche, die nicht durch die Multiplication anderer Zahlen in einander entstehen. Diese letzten, die man auch Primzahlen zu nennen pflegt, mußten, wenigstens größtentheils, zuerst gefunden werden, und dies geschahe auf eine sehr mühsame Art. Man suchte nemlich zwischen zwey Zahlen, deren Logarithmen bekannt waren, so lange die mittlere geometrische Proportionalzahl, bis man eine Zahl erhielt, welche der Zahl, deren Logarithmen man suchte, so nahe kam, daß der Fehler noch kein $\frac{1}{10000000}$ betrug. Eben so oft und in derselben Ordnung mußte man dann auch die mittlere arith-

metische Proportronalzahl zwischen den bekannten Logarithmen jener beyden Zahlen für die jedesmahl erhaltene mittlere geometrische Proportionalzahl suchen. Ein Beyspiel wird es deutlicher machen.

Man verlangt den Logarithmen der Zahl 2.

Weil 2 zwischen 1 und 10 fällt, so suche man mediam geometrice proportionalem zwischen 1 und 10. Es ist aber auf sieben Decimalstellen berechnet media geometrice prop. zwischen 1 und $10 = \sqrt{1 . 10} . \sqrt{10}$. (VII. §. 55.)

$= 3,1622776.$

Hiezu ist nun der Logarithmus media arithmetice proportionalis zwischen 0 und 1, als der Logarithmen der beyden Zahlen 1 und 10 §. 45. Es ist aber auf sieben Decimalstellen berechnet media arith. prop. zwischen 0 und $1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5000000$ (VII. §. 22.)

Weil man aber die Zahl 2 und ihren Logarithmen verlangt, 2 aber jetzt zwischen 1 und der gefundenen Zahl 3,1622776 fällt, so suche man wieder med. geom. prop. zwischen 1 und $3,1622776 = \sqrt{1 . 3,1622776} = 1,7782793.$

Der Logarithme zu dieser Zahl ist media arith. prop. zwischen 0 und $0,5000000 = \frac{0+0,5000000}{2}$

$= \frac{0,5000000}{2} = 0,2500000.$

Nunmehr fällt die verlangte Zahl 2 zwischen 1,7782793 und 3,1622776. Man suche also mediam geom. prop. zwischen 1,7782793 und $3,1622776 = \sqrt{1,7782793 . 3,1622776} = 2,3713736.$

Hiezu

Hiezu ist der Logarithmus media arith. prop. zwischen 0,5000000 u. 0,2500000 $= \frac{0{,}5000000 + 0{,}2500000}{2}$

$= \frac{0{,}7500000}{0} = 0{,}3750000.$

Nun fällt die verlangte Zahl 2 zwischen 1,7782793 und 2,3713736. Man muß also wieder mediam geom. prop. suchen zwischen diesen beyden Zahlen, diese ist $\sqrt{1{,}7782793 \cdot 2{,}3713736} = 2{,}0535249.$

Den Logarithmus hiezu findet man, wenn man nun auch mediam arith. prop. sucht zwischen 0,2500000 und 0,3750000 $= \frac{0{,}2500000 + 0{,}3750000}{2}$

$= \frac{0{,}6250000}{2} = 0{,}3125000.$

Diese doppelte Operation wiederholt man so oft, bis man endlich die verlangte Zahl 2,0000000 erhält, deren Logarithmus dann die mittlere arithmetische Proportionalzahl ist zwischen dem Logarithmen der beyden Zahlen, zu welchen die gefundene 2 oder 2,0000000 media geom. prop. ist.

Die zu Ende geführte Rechnung kann man aus dem folgenden ersehen, wo in der ersten Columne $a = 1$ oder 1,0000000 und $b = 10$ oder 10,0000000 gesetzt worden, c, d, e, f u. s. w. aber die jedesmalige mittlere geometrische Proportionalzahl bedeutet. In der zweyten Columne aber ist $a = 0$ oder 0,0000000 und $b = 1$ oder 1,0000000; c, d, e, f u. s. w. aber bedeuten die jedesmahlige mittlere arithmetische Proportionalzahl.

Zahlen und ihre

a = 1,0000000.
b = 10,0000000.
c = √ ab = √ 1,0000000 . 10,0000000
= 3,1622776.
d = √ ac = √ 1,0000000 . 3,1622776.
= 1,7782793
e = √ cd = √ 3,1622776 . 1,7782793.
= 2,3713736.
f = √ de = √ 1,7782793 . 2,3713736
= 2,0535249.
g = √ df = √ 1,7782793 . 2,0535249.
= 1,9109528.
h = √ fg = √ 2,0535249 . 1,9109528.
= 1,9809566.
i = √ fh = √ 2,0535249 . 1,9809566.
= 2,0169144.
k = √ hi = √ 1,9809566 . 2,0169144.
= 1,9988546.
l = √ ik = √ 2,0169144 . 1,9988546.
= 2,0078641.
m = √ kl = √ 1,9988546 . 2,0078641.
= 2,0033542
n = √ km = √ 1,9988546 . 2,0033542.
= 2,0011031.
o = √ kn = √ 1,9988546 . 2,0011031.
= 1,9999785. p =

## Logarithmen.

a = 0,0000000.

b = 1,0000000.

$c = \frac{a + b}{2} = \frac{0{,}0000000 + 1{,}0000000}{2}$

$= 0{,}5000000.$

$d = \frac{a + c}{2} = \frac{0{,}0000000 + 0{,}5000000}{2}$

$= 0{,}2500000$

$e = \frac{c + d}{2} = \frac{0{,}5000000 + 0{,}2500000}{2}$

$= 0{,}3750000$

$f = \frac{d + e}{2} = \frac{0{,}2500000 + 0{,}3750000}{2}$

$= 0{,}3125000.$

$g = \frac{d + f}{2} = \frac{0{,}2500000 + 0{,}3125000}{2}$

$= 0{,}2812500.$

$h = \frac{f + g}{2} = \frac{0{,}2500000 + 0{,}2812500}{2}$

$= 0{,}2968750.$

$i = \frac{f + h}{2} = \frac{0{,}3125000 + 0{,}2968750}{2}$

$= 0{,}3046875.$

$k = \frac{k + i}{2} = \frac{0{,}2968750 + 0{,}3046875}{2}$

$= 0{,}3007812.$

$l = \frac{i + k}{2} = \frac{0{,}3046875 + 0{,}3007812}{2}$

$= 0{,}3027343.$

$m = \frac{k + l}{2} = \frac{0{,}3007812 + 0{,}3027343}{2}$

$= 0{,}3017578.$

$n = \frac{k + m}{2} = \frac{0{,}3007812 + 0{,}3017578}{2}$

$= 0{,}3012695.$

$o = \frac{k + n}{2} = \frac{0{,}3007812 + 0{,}3012695}{2}$

$= 0{,}3010253.$

p =

$p = \sqrt{no} = \sqrt{2,0011031 \cdot 1,9999785}$.

$= 2,0005407$.

$q = \sqrt{op} = \sqrt{1,9999785 \cdot 2,0004507}$.

$= 2,0002595$.

$r = \sqrt{oq} = \sqrt{1,9999785 \cdot 2,0002595}$.

$= 2,0001189$.

$s = \sqrt{or} = \sqrt{1,9999785 \cdot 2,0001189}$.

$= 2,0000486$

$t = \sqrt{os} = \sqrt{1,9999785 \cdot 2,0000486}$.

$= 2,0000135$.

$v = \sqrt{ot} = \sqrt{1,9999785 \cdot 20000135}$.

$= 1,9999959$.

$w = \sqrt{tv} = \sqrt{2,0000135 \cdot 1,9999959}$

$= 2,0000046$.

$x = \sqrt{vw} = \sqrt{1,9999959 \cdot 2,0000046}$.

$= 2,0000009$.

$y = \sqrt{vx} = \sqrt{19999959 \cdot 2,0000009}$.

$= 1,9999983$.

$z = \sqrt{xy} = \sqrt{2,0000009 \cdot 19999983}$.

$= 1,9999995$.

$\alpha = \sqrt{xz} = \sqrt{2,0000009 \cdot 1,9999995}$.

$= 2,0000001$.

$\beta = \sqrt{zz} = \sqrt{1,9999995 \cdot 2,0000001}$.

$= 1,9999997$.

$\gamma = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{2,0000001 \cdot 1,9999997}$.

$= 2,0000000$.

p =

$$p = \frac{n + o}{2} = \frac{0{,}3012695 + 0{,}3010253}{2}$$
$$= 0{,}3011474.$$

$$q = \frac{o + p}{2} = \frac{0{,}3010253 + 0{,}3011474}{2}$$
$$= 0{,}3010864.$$

$$r = \frac{o + q}{2} = \frac{0{,}3010253 + 0{,}3010864}{2}$$
$$= 0{,}3010559.$$

$$s = \frac{o + r}{2} = \frac{0{,}3010253 + 0{,}3010559}{2}$$
$$= 0{,}3010406.$$

$$t = \frac{o + s}{2} = \frac{0{,}3010253 + 0{,}3010406}{2}$$
$$= 0{,}3010330.$$

$$v = \frac{o + t}{2} = \frac{0{,}3010253 + 0{,}3010330}{2}$$
$$= 0{,}3010292.$$

$$w = \frac{t + v}{2} = \frac{0{,}3010330 + 0{,}3010292}{2}$$
$$= 0{,}3010311.$$

$$x = \frac{v + w}{2} = \frac{0{,}3010292 + 0{,}3010311}{2}$$
$$= 0{,}3010301.$$

$$y = \frac{v + x}{2} = \frac{0{,}3010292 + 0{,}3010301}{2}$$
$$= 0{,}3010296.$$

$$z = \frac{x + y}{2} = \frac{0{,}3010301 + 0{,}3010296}{2}$$
$$= 0{,}3010299.$$

$$\alpha = \frac{x + z}{2} = \frac{0{,}3010301 + 0{,}3010299}{2}$$
$$= 0{,}3010300.$$

$$\beta = \frac{z + \alpha}{2} = \frac{0{,}3010299 + 0{,}3010300}{2}$$
$$= 0{,}3010299.$$

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{0{,}3010300 + 0{,}3010299}{2}$$
$$= 0{,}3010300.$$

Anmer-

Die Logarithmen z und β, desgleichen α und γ sind zwar hier einander gleich, allein wenn jedesmahl die mittlere arithmetische Proportionalzahl ganz vollständig gesucht wird, so findet allerdings ein Unterschied; denn es ist

$$z = \frac{x+y}{2} = 0{,}30102992057800292968 75.$$

$$\alpha = \frac{x+z}{2} = 0{,}30103003978729248046875$$

$$\beta = \frac{z+\alpha}{2} = 0{,}30102998018264770507812 5.$$

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}30103000099849700927734 75.$$

47.

Auf gleiche Art mußten auch die übrigen sogenannten Primzahlen gefunden und ihre Logarithmen berechnet werden, deren Anzahl zwischen 1 und 100 sich noch auf 25 beläuft, wenn man die 5 nicht mit rechnet, weil man deren Logarithmen auf einen kürzern Weg finden kann; denn weil

$$5 = \frac{10}{2}$$

so ist auch $\log. 5 = \log. \frac{10}{2}$

$\log. \frac{10}{2} = \log. 10 - \log. 2.$ §. 43. 44.

$\log. 2 = 0{,}3010300.$ §. 46.

$\log. 10 = 1{,}0000000.$ §. 45.

F. $\log. 5 = 1{,}0000000 - 0{,}3010300 = 0{,}6989700.$

48.

Die Logarithmen derjenigen Zahlen, von deren Factoren die Logarithmen bekannt, oder welche Potenzen kleinerer Zahlen sind, lassen sich leicht theils durch die Addition, theils durch die Multiplication finden. Denn wenn

1. $4 = 2^2$

so ist $\log. 4 = 2 \log. 2.$ §. 39.

$\log. 2 = 0{,}3010300.$ §. 46.

F. $\log. 4 = 2. 0{,}3010300 = 0{,}6020600.$

2. Und

2. Und weil $8 = 2^3$

so ist log. $8 = 3$ log. 2. §. 41.
oder log. $8 = 3 . 0{,}30103000 = 0{,}90309000$.

3. Und weil $32 = 4 . 8$.

so ist log. $32 =$ log. $4 +$ log. 8
log. $4 = 0{,}60206000$ (p. num. 1.)
log. $8 = 0{,}90309000$ (p. num. 2.)

F. log. $32 = 1{,}50515000$

Auf diese Art lassen sich die Logarithmen einer großen Anzahl gerader Zahlen finden. Wüßte man nun noch den Logarithmen von 3, so wäre

1. log. $6 =$ log. $2 +$ log. 3. §. 38.
2. log. $9 = 2$ log. 3. §. 39.
3. log. $12 =$ log. $3 +$ log. 4. §. 38.
4. log. $81 = 2$ log. 9 oder $= 4$ log. 3.
5. log. $15 =$ log. $3 +$ log. 5.

49.

Die Zahl, welche vor den Decimalstellen steht und durch ein Comma davon getrennt ist, heißt die Karakteristik des Logarithmen, weil man an derselben sehen kann, aus wie viel Ziefern die dem Logarithmus zugehörige Zahl besteht. Die Zahl enthält nemlich allemahl eine Ziefer mehr, als die Karakteristik ihres zugehörigen Logarithmen Einheiten enthält. Denn da nach dem Briggeschen Logarithmensystem log. $1 = 0$, log. $10 = 1$, log. $100 = 2$, log. $1000 = 3$ u. s. w. so ist die Karakteristik aller Zahlen von 1 bis $9 = 0$, von 10 bis $99 = 1$, von 100 bis $999 = 2$, von 1000 bis $9999 = 3$ ꝛc.

Umgekehrt kann man aus der Anzahl Ziefern, woraus eine Zahl besteht, erkennen, wie groß die Karakteristik ihres Logarithmen seyn müsse. Die

Karak-

Karakteristik besteht nämlich allemahl aus einer Einheit weniger, als die zugehörige Zahl Ziefern enthält. Man könnte daher auch zur Ersparung des Raums diese Karakteristik in der logarithmischen Tafel füglich weglassen, weil man sie in jedem Falle leicht selbst hinzusetzen kann. Dieses Vortheils hat man sich auch wirklich in einigen Tafeln bedient.

50.

Der Logarithmus der 10, 100, 1000fachen ꝛc. Zahl ist, was die Decimalstelle betrifft, gleich dem Logarithmen der einfachen Zahl, die Karakteristik aber muß man um so viel Einheiten vermehren, als durch die Multiplication der einfachen Zahl in 10 oder in eine Potenz von 10 an die einfache Zahl Nullen gesetzt worden sind.

So ist log. 20 = log. 2 + log. 10 §. 38.
log. 2 = 0,30103000 §. 46.
log. 10 = 1,0000000 §. 45.

F. log. 20 = 1,3010300
F. log. 200 = 2,3010300
F. log. 2000 = 3,3010300 u. s. w.

Ferner log. 50 = log. 5 + log. 10 §. 38.
log. 5 = 0,6989700. §. 47.
log. 10 = 1,0000000. §. 45.

F. log. 50 = 1,6989700.
F. log. 500 = 2,6989700. §. 43.
F. log. 5000 = 3,6989700.

Ferner log. 320 = log. 32 + log. 10. §. 38.
log. 32 = 1,5051500. §. 48.
log. 10 = 1,0000000. §. 45.

F. log. 320 = 2,5051500.

51.

51.

Der Logarithmus einer durch 10 oder durch eine Potenz von 10 dividirten Größe ist, was die Decimalbrüche betrifft, gleich dem Logarithmus der dividirten Größe, die Karakteristik aber des Logarithmen der dividirten Größe muß um so viel Einheiten vermindert werden, als der Exponent der Potenz von 10 Einheiten enthält. Es ist daher

log. 3,2 = 1,5051500 — 1 = 0,5051500.

Beweis.

$3{,}2 = \frac{32}{10}$

log. $\frac{32}{10}$ = log. 32 — log. 10. §. 43.

log. 32 = 1,5051500. §. 48.

log. 10 = 1,0000000. §. 45.

---

F. log. 3,2 = 0,5051500.

52.

Es ist schon oben §. 45. angemerkt, daß man sich anstatt der Zahlen selbst mit großem Vortheil ihrer Logarithmen beym Rechnen bedienen könne, dies aber setzt voraus, daß man die Logarithmen aller nur irgend vorkommenden Zahlen wisse. Nun hat man zwar die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 wirklich berechnet. Allein wie oft kommen nicht noch größre Zahlen vor? Ueberdem findet man sie auch nicht einmahl in allen logarithmischen Tafeln so weit berechnet, denn in den gewöhnlichen kleinen Tafeln findet man sie nur bis 10000. Es frägt sich also: Wie erhält man die Logarithmen der Zahlen über 10000? Und weil in den Tafeln nur die Logarithmen der ganzen Zahlen stehen, wie erhält man den Logarithmus einer Zahl mit angehängtem Decimalbruch, oder überhaupt den Logarithmus

eines

eines aus vielen Ziefern bestehenden Bruchs? Und umgekehrt: wie findet man zu einem Logarithmen, der nicht in den Tafeln steht, die ihm zukommende Zahl?

53.

1. Wie findet man den Logarithmus einer Zahl, der nicht in den Tafeln steht?

a. Wenn sich die Zahl in solche Factoren resolviren läßt, deren Logarithmen man in den Tafeln findet.

In diesem Fall addire man §. 38. die Logarithmen ihrer Factoren, so erhält man mit der Summe den Logarithmus der gegebenen Zahl. Man sucht z. B. den Logarithmus der Zahl 164025.

Weil log. 164025 = 25.6563

so ist auch log. 164025 = log. 25 + log. 6563. §. 38.

log. 25 = 1,3979400
log. 6563 = 3,8171024

F. log. 164025 = 5,2150424

Eben so ist auch

log. 14762250 = log. 4050 + log. 3645.

log. 4050 = 3,6074550
log. 3645 = 3,5616975

F. log. 14762250 = 7,1691525

54.

Die Differenzen der Zahlen, vornehmlich aber der Zahlen über 8000 stehen mit den Differenzen ihrer Logarithmen ziemlich genau in Proportion. So ist z. B.

log. 8290 = 3,9185545
log. 8289 = 3,9185021

F. Zahlendifferenz = 1 und 524 = Log. Diff.

und

und log. 8290 = 3,9185545
log. 8285 = 3,9182925

F. Zahlendifferenz = 5 und 2620 = Log. Diff.
Es ist aber 1 : 5 = 524 : 2620.

Auf diesen Satz gründet sich die Auflösung des folgenden Falles.

55.

b. Wenn sich die Zahl überall nicht in Factores oder doch nicht in soiche resolviren läßt, deren Logarithmen in den Tafeln stehen.

1. Man schneidet von der gegebenen Zahl rechter Hand so viel Ziefern ab, daß linker Hand nur noch vier Ziefern übrig bleiben, und betrachtet die abgeschnittenen Ziefern vors erste als Decimalbrüche.
2. Man zieht die linker Hand behaltene Zahl und ihren Logarithmen von der in den Tafeln befindlichen nächst größern Zahl und ihrem Logarithmen ab.
3. Man sucht zur erhaltenen Zahlendifferenz = 1, zu der linker Hand abgeschnittenen Zahl, die man als einen Decimalbruch betrachtet, und zur erhaltenen logarithmischen Differenz die vierte geometrische Proportionalzahl.
4. Von dieser gefundenen vierten Proportionalzahl addirt man die sieben ersten Decimalstellen zu den Decimalstellen des Logarithmen derjenigen Zahl, die man linker Hand übrig behielt, so erhält man mit der Summe den Logarithmen der Zahl linker Hand plus den abgeschnittenen Decimalbrüchen rechter Hand.

5. Man vermehrt endlich die Karakteristik um so viel Einheiten, als man rechter Hand Ziefern von der gegebenen Zahl abgeschnitten hatte, so erhält man den verlangten Logarithmen der gegebenen Zahl.

1) Man braucht z. B. den Logarithmen der Zahl 43046721.

Nach Nr. 1. wird aus 43046721 der Zahl 4304,6721.

Nach Nr. 2. ist log. 4305 = 3,6339732

log. 4304 = 3,6338723

Zahlendiff. = 1 u. 0,00001009 = Log. diff.

Nach Nr. 3. schließt man

1 : 0,6721 = 0,00001009 : x

F. x = 0,6721 . 0,00001009.

d. i. x = 0,000006781489 = log. 0,6721.

Nach Nr. 4. log. 4304 = 3,6338723

F. log. 4304,6721 = 3,6339401

Nach Nr. 5. log. 43046721 = 7,6339401.

Denn weil 43046721 = 4304,6721 . 10000

so ist auch log. 43046721 = log. 4304,6721 + log. 10000 §. 38.

log. 4304,6721 = 3,6339401

log. 10000 = 4,0000000. §. 45.

so ist log. 43046721 = 7,6339401.

## Anmerkung.

Die gegebene Zahl 43046721 ist ein Product aus 9, weil das Collect aller Ziefern derselben ein Product aus 9 ist, und zwar ist sie die achte Dignität von 9. Ich habe sie deshalb gewählt, um zu zeigen, daß man durch dies Verfahren allerdings den verlangten Logarithmen finden könne, weil man eben denselben Logarithmen erhält, wenn man ihn von $9^8$ sucht.

Es

Es ist aber log. $9^8$ = 8 log. 9. §. 39. u. 41. u. 42. Anm.

log. 9 = 0,9542425

F. log. $9^8$ = log. 43046721 = 8 . 0,9542425

= 7,6339400

Der Unterschied zwischen beyden beträgt nur 0,0000001.

2) Welches ist der Logarithmus der Zahl 95984149 1?

Nach Nr. 1. wird aus 95984149 1 die Z. 9598,41491.

Nach Nr. 2. ist log. 9599 = 3,9822260

log. 9598 = 3,9821807

1. 0,0000453

Nach Nr. 3. ist 1 : 0,41491 = 0,0000453 : x

F. x = 0,41491 . 0,0000453.

d. i. x = 0,000018795423 =

log. 0,41491.

Nach Nr. 4. ist log. 9598 = 3,9821807

F. log. 9598,41491 = 3,9821994

Nach Nr. 5. ist log. 95984149 1 = 8,9821994.

56.

2. Wie findet man den Logarithmus einer vermischten Zahl?

a. Wenn die vermischte Zahl aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Decimalbruch besteht.

1. Besteht die ganze Zahl außer dem Decimalbruch nur aus vier Ziefern, so verfährt man in allen damit nach den vorigen Regeln, nur daß man in diesem Fall nicht nöthig hat, die Karakteristik nach der fünften Regel §. 55. zu vermehren.

2. Besteht aber die ganze Zahl außer dem Decimalbruch aus mehr, als vier Ziefern, so schneidet man von derselben rechter Hand noch so viel

Ziefern ab, daß linker Hand nur noch vier Ziefern übrig bleiben, vermehrt aber die Karakteristik des nach der vierten Regel erhaltenen Logarithmen um so viel Einheiten, als man Ziefern von der ganzen Zahl abgeschnitten hatte.

3) Besteht endlich die ganze Zahl außer dem Decimalbruch aus weniger, als vier Ziefern, so zieht man von dem Decimalbruch noch so viel Ziefern hinzu, bis die Zahl linker Hand aus vier Ziefern besteht, und vermindert dann die Karakteristik des nach der vierten Regel erhaltenen Logarithmen um so viel Einheiten, als man noch Ziefern vom Decimalbruch zu der ganzen Zahl hat ziehen müssen.

I. Fall. Wenn die ganze Zahl außer dem Decimalbruch aus vier Ziefern besteht.

1) Man sucht den Logarithmus der Zahl 8777,7.

Nach Nr. 2. ist log. 8778 = 3,9433956
log. 8777 = 3,9433461

1. 0,0000495

Nach Nr. 3. 1 : 0,7 = 0,0000495 : x

F. x = 0,00003465 = log. 0,7.

Nach Nr. 4. log. 8777 = 3,9433461

F. log. 8777,7 = 3,9433807.

2) Man sucht den Logarithmus der Zahl 9990,999.

Nach Nr. 2. ist log. 9991 = 3,9996090
log. 9990 = 3,9995655

1. 0,0000435

Nach Nr. 3) 1 : 0,999 = 0,0000435 : x

F. x = 0,00000434565 = log. 0,999.

Nach Nr. 4. log. 9990 = 3,9995655

F. log. 9990,999 = 3,9996089.

Ueber

Ister Fall. Wenn die ganze Zahl außer dem Decimalbruch aus mehr, als vier Ziefern besteht.

1) Man sucht den Logarithmus der Zahl 99909,99.

Nach Nr. 1. wird aus 99909,99 die Zahl 9990,999.

Nach Nr. 2. ist log. 9991 = 3,9996090
log. 9990 = 3,9995655
1 0,0000435

Nach Nr. 3) 1 : 0,999 = 0,0000435 : x

F. x = 0,0000434565 = log. 0,999.

Nach Nr. 4. log. 9990 = 3,9995655

F. log. 9990,999 = 3,9996089
F. log. 99,90999 = 4,9996089

Denn weil 99909,99 = 9990,999 . 10

so ist auch log. 99909,99 = l. 9990,999 + log. 10.
l. 9990,999 = 3,9996089
l. 10 = 1,0000000

F. log. 99909,99 = 4,9996089.

2) Man sucht den Logarithmus der Zahl 864201,3579.

Nach Nr. 1. wird aus 864201,3579 die Zahl 8642,013579.

Nach Nr. 2. ist log. 8643 = 3,9366645
log. 8642 = 3,9366143
1 0,0000502

Nach Nr. 3. ist

1 : 0,013579 = 0,0000502 : x

F. x = 0,00000068166658 = l. 0,013579.

Nach Nr. 4. log. 8642 = 3,9366143

F. log. 8642,013579 = 3,9366149
und log. 864201,3579 = 5,9366149

IIIter Fall. Wenn die ganze Zahl außer dem Decimalbruch, weniger als vier Ziefern enthält.

1) Man sucht den Logarithmen der Zahl 9,75310 24
Nach Nr. 1. wird aus 9,75310 24 die Zahl 9753,1024 gemacht.

Nach Nr. 2. log. 9754 = 3,9891828
log. 9753 = 3,9891382

1 0,0000446

Nach Nr. 3) 1 : 0,1024 = 0,0000446 : x

F. x = 0,0000456704 = l. 0,1024.

Nach Nr. 4. log. 9753 = 3,9891382

F. log. 9753,1024 = 3,9891838
F. log. 9,75310 24 = 0,9891838.

2) Man sucht den Logarithmen der Zahl 468,9285.
Nach Nr. 1. wird aus 468,9285 die Zahl 4689,285 gemacht.

Nach Nr. 2. log. 4690 = 3,6711728
log. 4689 = 3,6710802

1 0,0000926.

Nach Nr. 3. 1 : 0,285 = 0,0000926 : x

F. x = 0,0000263910 = l. 0,285.

Nach Nr. 4. log. 4689 = 3,6710802

F. log. 4689,285 = 3,6711065
F. log. 468,9285 = 2,6711065.

57.

b. Wenn die vermischte Zahl aus einer ganzen Zahl mit einem gemeinen Bruch bestehr.

Man verwandele den gemeinen Bruch nach IIII. §. 5. in einen Decimalbruch und hänge ihn an die ganze Zahl, so wird dadurch dieser Fall auf einen der drey Fälle des vorigen §. reducirt.

1) Man

1) Man sucht den Logarithmus der Zahl $8009\frac{13}{16}$.

Weil $\frac{13}{16} = 0{,}8125$, so ist $8009\frac{13}{16} = 8009{,}8125$.

Nun gehört die Zahl unter den ersten Fall. §. 56.

Folglich log. $8009\frac{13}{16}$ = log. $8009{,}8125$ = $3{,}9036223$.

2) Man sucht den Logarithmen der Zahl $24068\frac{24}{25}$.

Weil $\frac{24}{25} = 0{,}96$, so ist $24068\frac{24}{25} = 24068{,}96$.

Nun gehört diese Zahl unter den zweyten Fall. §. 56.

Folglich log. $24068\frac{24}{25}$ = log. $24068{,}96$ = $4{,}3813117$.

3) Man sucht den Logarithmen der Zahl $85\frac{61}{64}$.

Weil $\frac{61}{64} = 0{,}953125$, so ist $85\frac{61}{64} = 85{,}953125$; es wird also nunmehr diese Zahl nach dem dritten Fall §. 56. behandelt. Es ist also log. $85{,}953125 = 1{,}9344037$.

58.

3. Wenn ein Logarithmus gegeben ist, der in den Tafeln nicht stehet, wie findet man die dazu gehörige Zahl?

Es kann hier zwey verschiedene Fälle geben; denn entweder ist bloß die Karakteristik des gegebenen Logarithmen größer, als die Kennzeichen der Logarithmen in den Tafeln, die Decimalstellen aber des gegebenen Logarithmen findet man genau in den Tafeln, oder die Decimalbrüche des gegebenen Logarithmen stehen nicht in den Tafeln.

a. Wenn der gegebene Logarithmus bloß in Ansehung der Karakteristik von den Logarithmen in den Tafeln abweicht.

Man ziehe von dem gegebenen Logarithmus den Logarithmus in den Tafeln, der dieselben Decimalbrüche hat, ab, und multiplicire die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl in diejenige Potenz von

10, deren Exponent gleich ist dem Unterschied der Kennziefern beyder Logarithmen, so erhält man mit dem Product die Zahl, die dem gegebenen Logarithmus zukommt.

Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 kommen mit der Karakteristik 1 wieder als Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 vor. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 100 kommen mit der Karakteristik 2 wieder vor als Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 1000 kommen wieder vor als Logarithmen der Zahlen zwischen 1000 und 10000 mit der Karakteristik 3. Man kann also schließen, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10000 mit der Karakteristik 4 wieder als Logarithmen der Zahlen zwischen 10000 und 100000 vorkommen würden, wenn sie in den kleinen Tafeln so weit berechnet wären. Da also einerley Logarithmus in Ansehung des Decimalbruchs so wohl der einfachen Zahl als auch dem Product derselben in eine Potenz von 10 multiplicirt zukömmt, so ists auf die angezeigte Art leicht zu jedem Logarithmus, dessen Bruch in den Tafeln vorkommt, die zugehörige Zahl anzugeben.

Man hat z. B. den Logarithmus 6,6821451, es frägt sich, zu welcher Zahl er gehöre?

gegebener Log. 6,6821451
in der Tafel ist 3,6821451 = log. 4810

Differenz 3,0000000 = log. 1000. §. 45.

F. 6,6821451 = log. 4810000.

Beweis.

Beweis.

$$4810000 = 4810 \cdot 1000.$$

§. $\log. 4810000 = \log. 4810 + \log. 1000.$ §. 38.

$\log. 4810 = 3,6821451$

$\log. 1000 = 3,0000000$

§. $\log. 4810000 = 6,6821451.$

59.

b, Wenn die Decimalbrüche des gegebenen Logarithmen in den Tafeln nicht stehen.

1. Man sucht unter der Karakteristik 3 die beyden Grenzlogarithmen, zwischen welchen die Decimalbrüche des gegebenen Logarithmen fallen, und zieht den nächst kleinern vom nächst größern ab. Die Differenz ihrer zugehörigen Zahlen ist natürlich allemahl = 1.
2. Auch zieht man von dem gegebenen Logarithmus den nächst kleinern Grenzlogarithmen ab.
3. Dann schließt man: Wie sich verhält die Differenz der beyden Grenzlogarithmen (Nr. 1.) zur Differenz zwischen dem gegebenen und nächst kleinern Logarithmen (Nr. 2) so verhält sich auch die Zahlendifferenz 1 (Nr. 1.) zur vierten geometrischen Proportionalzahl.
4. Die nach Nr. 3. gefundene Zahl addirt man als einen Bruch zu der dem nächst kleinern Grenzlogarithmen zugehörigen Zahl.
5. Dann vergleicht man die Karakteristik des gegebenen und des nächst kleinern Grenzlogarithmen mit einander.

Sind beyde Kennziefern gleich, so hat man mit Nr. 4. die Zahl zu dem gegebenen Logarithmus gefunden.

Ist aber die Kennziefer des gegebenen Logarithmen größer als die Kennziefer des nächst kleinern Grenzlogarithmen, so multiplicirt man die nach Nr. 4. erhaltene Zahl in eine Potenz von 10, deren Exponent gleich ist der Zahl, um welche die Karakteristik des gegebenen Logarithmen größer ist, als die Karakteristik des kleinern Grenzlogarithmen.

Ist endlich aber die Karakteristik des gegebenen Logarithmen kleiner, als die Karakteristik des kleinern Grenzlogarithmen, so dividirt man die nach Nr. 4. erhaltene Zahl durch eine Potenz von 10, deren Exponent gleich ist der Zahl, um welche die Kennziefer des gegebenen Logarithmen kleiner ist, als die Kennziefer des kleinern Grenzlogarithmen.

1) Es ist gegeben der Logarithmus 3,7992372; man sucht die dazu gehörige Zahl.

Nr. 1. Grenzlogarithmen { 3,7992716 = log. 6299 / 3,7992027 = log. 6298

Log. Diff. = 689. Zahlend. = 1

Nr. 2. Gegebener Logarithmus 3,7992372

Kleinerer Grenzlogar. 3,7992027

Logar. Diff. = 345

Nr. 3. 689 : 345 = 1 : x.

F. x = $\frac{345}{689}$ = 0,5.

Nr. 4. 3,7992027 = log. 6298

F. 3,7992372 = log. 6298,5.

2) Es ist gegeben der Logarithmus 6,8860665, man sucht die dazu gehörige Zahl.

Nr. 1. Grenzlogarithmen { 3,8860957 = log. 7693 / 3,8860393 = log. 7692

564. 1.

Nr. 2.

Nr. 2. Gegebener Logarithmus 6,8860665
Kleinerer Grenzlogar. 3,8860393

272

Nr. 3. 564 : 272 = 1 : x.

F. x = $\frac{272}{564}$ = 0,4822696.

Nr. 4. 3,8860393 = log. 7692

F. 3,8860665 = log. 7692,4822696.

Nr. 5. 6,8860665

3,0000000 = log. 1000.

F. 6,8860665 = log. 7692,4822696 . 1000
= log. 7692482,2696.

Beweis.

7692482,2696 = 7692,4822696 . 1000.

F. l. 7692482,2696 = l. 7692,4822696 + l. 1000
l. 7692,4822696 = 3,8860665
l. 1000 = 3,0000000

F. l. 7692482,2696 = 6,8860665

3) Es ist gegeben der Logarithmus 1,9569774, man sucht die dazu gehörige Zahl.

Nr. 1. Grenzlogarithmen { 3,9569844 = log. 9057
3,9569364 = log. 9056.

480 1.

Nr. 2. Gegebener Logarithmus 1,9569774.
Kleinerer Grenzlogarithm. 3,9569364

410.

Nr. 3. 480 : 410 = 1 : x

F. x = $\frac{41}{48}$ = 0,91666....

Nr. 4. 3,9569364 = log. 9056

F. 3,9569774 = log. 9056,91666...

Nr. 5.

Nr. 5. $\frac{1,9569774}{2,0000000 = \log. 100.}$

F. $1,9569774 = \log. 90,5691666 \ldots$

Beweis.

$90,5691666 = \frac{9056,91666}{100}$

F. l. $90,5691666 =$ l. $9056,91666 -$ l. 100. §. 43.

l. $9056,91666 = 3,9569774$

l. $100 = 2,0000000$

F. l. $90,5691666 = 1,9569774.$

60.

e. Es ist gegeben ein negativer Logarithmus, man sucht die dazu gehörige Zahl.

Die einem negativen Logarithmen zugehörige Zahl ist ein Bruch, dessen Zähler $= 1$, der Nenner aber diejenige Zahl ist, welche dem gegebenen Logarithmen positiv genommen zukommt.

Es sey gegeben der Logarithmus $= -3,8808136$, so ist die zugehörige Zahl $= \frac{1}{76000} = 0,0001315789.$

Beweis.

Es sey der Zähler des Bruchs $= x$ und sein Nenner $= 10000$,

dann ist $\log. \frac{x}{10000} = -3,8808136.$

$x = \frac{x}{10000} . 10000.$ (II. §. 19).

F. $\log. x = \log. \frac{x}{10000} + \log. 1000.$ §. 38.

$\log. \frac{x}{10000} = -3,8808136$

log. $10000 = 4,0000000$

F. $\log. x = -0,1191864$

Man suche nun die zu 0,1191864 gehörige Zahl nach §9. Nr. 1.

Nr. 1. Grenzlogarithmen { 3,1192559 = log.1316
3,1189257 = log.1315

3302. 1.

N. 2. Gegebener Logarithmus 0,1191864
Kleinerer Grenzlogar. 0,1189257

2607.

Nr. 3. 3302 : 2607 = 1 : x

F. $x = \frac{2607}{3302} = 0{,}789\ldots$

Nr. 4. 3,1189257 = log. 1315

F. 3,1191864 = log. 1315,789 ....

Nr. 5. 0,1191864

3,0000000 = log. 1000

F. 0,1191864 = log. 1,315789. Oben war
0,1191864 = log. x.

F. log. $\frac{1{,}315789}{10000} = -3{,}8808136$

$\frac{1{,}315799}{10000} = 0{,}0001315789 = \frac{1}{7600}$ (ohngefähr)

F. log. $\frac{1}{7600} = -3{,}8808136$.

## Zehntes Kapitel.
## Von den algebraischen Gleichungen.

1.

Die Algebra hat mit der gemeinen Arithmetik einerley Zweck, nemlich, wie man aus gewissen gegebenen oder bekannten Größen eine oder mehrere unbekannte nach den jedesmaligen in der Aufgabe angeführten Bedingungen finden soll; unterscheidet sich aber dadurch von derselben, daß sie das Unbekannte auf eine allgemeinere Art finden lehret. Die Art aber, wie man dabey verfährt, besteht der

Haupt-

Hauptsache nach darin. Man sieht das Unbekannte, was gesucht werden soll, als schon bekannt an, und benennet es zu dem Ende mit einem gewissen allgemeinen Zeichen, nimmt dann mit dieser allgemein bezeichneten Größe alle die Veränderungen vor, die in der Aufgabe angeführt sind, doch so, daß man diese Veränderungen ebenfalls nur durch die allgemeinen Zeichen der Rechnungsarten ausdrückt, und setzt endlich das Resultat davon derjenigen Größe gleich, welche in der Aufgabe gleichfalls entweder geradezu benannt ist, oder nach Beschaffenheit der darin angezeigten Bedingungen vorher erst noch ausgemittelt werden muß. Auf die Art aber erhält man einen doppelten durch das Zeichen der Gleichheit mit einander verbundenen Ausdruck für einerley Größe oder Sache, und diesen pflegt man eine Gleichung zu nennen.

2.

Die unbekannten Größen, die gesucht werden sollen, pflegt man gewöhnlich mit den letzten Buchstaben v, x, y, z; die bekannten aber oder gegebenen mit den ersten Buchstaben a, b, c, d u. s. w. zu benennen, wobey denn zu merken, daß man für jede verschiedene Größe auch einen besondern Buchstaben wählen, und daß ein Buchstabe die Bedeutung, die er einmahl erhalten hat, durch die ganze Aufgabe beybehalten müsse.

3.

Das schwerste bey der ganzen Arbeit besteht in Aufsetzung der Fundamentalgleichung, d. i. in richtiger und schicklicher Bezeichnung der Bestimmungen, die in der Aufgabe enthalten sind. Allgemeine Regeln lassen sich hier nicht geben, weil die Beschaffen-

schaffenheit der Fundamentalgleichung von den Umständen und Bedingungen abhängt, wodurch die unbekannte determinirt wird. Diese Fundamentalgleichung wird dann aufgelöset, wenn man sie, ohne die Gleichung aufzuheben, nach und nach so verändert, daß man endlich eine Gleichung erhält, in welcher die unbekannte Größe auf der einen Seite allein erscheint, die bekannten Größen aber auf die andere Seite zu stehen kommen.

4.

Die Veränderungen aber, wodurch die Fundamentalgleichung aufgelöset wird, bestehn in folgenden.

1. Man addirt auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens gleiche Größen; dadurch werden die negativen Größen von der einen Seite der Gleichung auf die andere gebracht. Wenn daher die Fundamentalgleichung

| | | |
|---|---|---|
| | $x - 5 = 10$ | oder $x - a = b$ |
| und | $+5 = +5$ | $+a = +a$ |
| so ist | $x = 10 + 5.$ | F. $x = b + a.$ |

2. Man subtrahirt auf beyden Seiten gleiche Größen; dadurch werden die positiven Größen von der einen Seite der Gleichung auf die andere geschafft. Denn wenn

| | |
|---|---|
| $3x + 6 = 10 + 2x$ | oder $x + a - b = a$ |
| $\pm 6 = \pm 6$ (abgezog.) | $-a = -a$ |
| $3x = 10 + 2x - 6$ | $x - b = c - a$ |
| $\pm 2x = \pm 2x$ (abgezog.) | $b = b$ |
| $3x - 2x = 10 - 6$ | $x = c - a + b.$ |
| $x = 4$ | |

Anmerkung.

Man wird leicht von selbst bemerken, daß es dieser Weitläuftigkeit nicht bedürfe; denn man darf

ja

ja nur die Plus- oder Minusgrößen, die man von der einen Seite wegnimmt, mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringen, d. i. die Plusgrößen, von der einen Seite weggeschafft, werden auf der andern negativ; und die negativen Größen, von der einen Seite weggeschafft, werden auf der andern positiv. Wenn daher

$$4x - 9 + 6 = 3x + 2$$

so ist $4x - 3x = 9 - 6 + 2$

d. i. $x = 5$.

Oder wenn $4x + 2m - 3n = 3x + 4m - a$

so ist $4x - 3x = 4m - 2m + 3n - a$

d. i. $x = 2m + 3n - a$.

3. Man multiplicirt die ganze Gleichung in einerley Größe, dadurch werden insbesondere die Nenner der Brüche weggeschafft. Es sey z. B.

$\frac{x}{12} + 12 - 2\frac{1}{3} = 11\frac{5}{12}$ (12

$x + 144 - 28 = 137$

$x = 137 + 28 - 144$

$x = 21$.

Oder $\frac{x}{m} - a = \frac{n}{m} + b$ (m

$x - am = n + bm$

$x = am + bm + n$

4. Man dividirt die ganze Gleichung durch einerley Größe, und befreyet dadurch insbesondere die unbekannte Größe von ihrem Coefficienten. Wenn daher

$5x = 3\frac{1}{3}$

so ist $x = \frac{2}{3}$

Oder $ax + 2m = \frac{b - c}{n}$ a)

$x + \frac{2m}{a} = \frac{b - c}{an}$

$x = -\frac{2m}{a} + \frac{b - c}{an}$

5. Man erhebt die ganze Gleichung zu einerley Dignität, die etwanigen Wurzelgrößen aus der Gleichung wegzuschaffen. Z. B. $\sqrt{100}$

$\sqrt{100-x} = 6.$ Oder $\sqrt{x+m} = 2\sqrt{(a-b)}$

$100-x = 36$ $x+m = 4(a-b)$

$100-36 = x$ $x = 4(a-b)-m.$

F. $x = 64.$

6. Man zieht einerley Wurzel aus den Größen der ganzen Gleichung, wenn die unbekannte Größe in einer höhern Dignität erscheint. Z. B.

$x + \frac{20}{x} - \frac{16}{x} = \frac{85}{x}$ (x

$x^2 + 20 - 16 = 85$

$x^2 = 85 + 16 - 20$

$x^2 = 81$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$

d. i. $x = 9.$

Oder $x^2 = a - b$

F. $\sqrt{x^2} = \sqrt{a-b}$

d. i. $x = \sqrt{a-b}$

7. Auch bedient man sich der logarithmischen Rechnung, wenn die unbekannte Größe als Exponent einer Dignität in der Fundamentalgleichung vorkommt Z. B.

$10^x - 50 = 950$ Oder $a^x = bc$

$10^x = 950 + 50$

$10^x = 1000$

$x \log. 10 = \log. 1000$ $x \log. a = \log. bc$

$\log. bc = l.b + l.c.$

F. $x = \frac{\log. b + \log. c}{\log. a.}$

$x = \frac{\log. 1000}{\log. 10}$

$x = \frac{3}{1} = 3.$

## Anmerkungen.

1. Aus der Beschaffenheit der Fundamentalgleichung muß beurtheilt werden, welche von diesen Veränderungen zur Auflösung derselben anzuwenden sey.

2. Auch ist zu merken, daß man einerley durchs Pluszeichen verbundene Größen wirklich addiren; einerley Größen, die von einander abgezogen werden sollen, wirklich abziehen; Größen, die multiplicirt oder dividirt, aus welchen die Wurzel gezogen, oder die in eine höhere Potenz erhoben werden sollen, auch wirklich multipliciren und dividiren, die Wurzel daraus ziehen und in die verlangte Potenz erheben müsse. Wo es aber nicht angeht, da begnügt man sich, die vorzunehmende Verändrung durch die gewöhnlichen Rechnungszeichen bloß anzudeuten.

5.

Eine Aufgabe kann eine oder mehr unbekannte Größen enthalten; im ersten Fall hat man nur eine, im andern Fall aber so viel Gleichungen aufzulösen, als unbekannte Größen in der Aufgabe enthalten sind.

Ist man in der Auflösung der Fundamentalgleichung so weit gekommen, daß man alle Glieder der unbekannten Größe auf die eine, die Glieder aber mit den bekannten Größen auf die andere Seite gebracht hat, so erhält man die unbekannte Größe entweder in der ersten oder in einer höheren Dignität. Nach der Beschaffenheit des Exponenten der Potenz der unbekannten Größe gehört eine Aufgabe entweder zu den Gleichungen vom ersten Grade, wenn der Exponent $= 1$, zu den Gleichungen vom zweyten, dritten Grade u. s. w. wenn der Exponent der unbekannten Größe 2 oder 3 u. s. w. ist.

## I.

## Die Gleichungen vom ersten Grade.

### 1. Wenn nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe enthalten ist.

6.

1. Aufgabe. Vier Kinder sollen sich in eine Verlassenschaft von 18000 rthlr. so theilen, daß das zweyte 100 rthlr. mehr bekomme, als das älteste; das dritte 100 rthlr. mehr als das zweyte, folglich 200 rthlr. mehr, als das älteste; das jüngste 100 rthlr. mehr, als das dritte, mithin 300 rthlr. mehr, als das älteste. Wie groß wird also eines jeden Antheil seyn?

Man sieht gleich, daß alle vier Kinder nach Abzug dessen, was den drey jüngern voraus vermacht worden, gleichen Antheil an dem Rest haben sollen. Man darf also nur die bestimmten 100 + 200 + 300 = 600 rthlr. von 18000 rthlr. abziehen und den Rest 18000 — 600 = 17400 in vier gleiche Theile theilen, so erfährt man eines jeden Antheil an den übrig gebliebenen 17400 rthlr.; es ist nemlich $= \frac{17400}{4} = 4350$ rthlr. und weil dem ältesten nichts voraus vermacht worden, so wäre also

des ältesten Antheil $= \frac{17400}{4} =$ . . . 4350 rthlr.

des zweyten — $= \frac{17400}{4} + 100 =$ 4450 —

des dritten — $= \frac{17400}{4} + 200 =$ 4550 —

des vierten — $= \frac{17400}{4} + 300 =$ 4650 —

18000 rthlr.

Allein durch folgende Schlüsse kommt man noch kürzer zum Zweck. Des ältesten Antheil ist am einfachsten bestimmt; man nehme ihn also als bekannt an und setze ihn = x.

Nun soll der zweyte eben so viel erhalten, als der erste, aber noch 100 rthlr. drüber, folglich ist sein Antheil = x + 100.

Der dritte bekommt auch so viel als der älteste, aber noch 200 rthlr. drüber, folglich x + 200.

Des jüngsten Antheil ist auch gleich des ältesten seinem, aber noch 300 rthlr. drüber, mithin x + 300.

Folglich die Summe aller vier Theile = x + x + 100 + x + 200 + x + 300.

Und weil die Summe dieser vier Theile der ganzen zu theilenden Summe gleich seyn soll, so ist

x + x + 100 + x + 200 + x + 300 = 18000 rthlr.

Addirt man aber die Größen wirklich, die sich addiren lassen, so erhält man folgende Fundamentalgleichung.

$$4x + 600 = 18000$$

F. $4x = 18000 - 600 = 17400$

4)

F. $x = \frac{17400}{4} = 4350$ rthlr. = des ältesten Theil.

F. x + 100 = 4450 — = des zweyten Theil.
x + 200 = 4550 — = des dritten Theil.
x + 300 = 4650 — = des vierten Theil.

Man kann aber auch die Ordnung umkehren, und des jüngsten Theil, als den größten Theil, zuerst bestimmen; setzt man nun des jüngsten Antheil = x,

so ist des vorletzten Antheil = x — 100
des zweyten Antheil = x — 200
des ältesten Antheil = x — 300

Folglich alle vier Theile zusammen 4x — 600

Weil

Weil aber die Summe gleich seyn soll der zu theilenden Summe, so hat man folgende Fundamentalgleichung aufzulösen.

$$4x - 600 = 18000$$

$$\text{F. } 4x = 18000 + 600 = 18600$$

$$\text{F. } x = \frac{18600}{4} = 4650 \text{ rthlr.} = \text{des jüngsten Theil}$$

$$\text{F. } x - 100 = 4550 - = \text{des vorletzt. Theil}$$
$$x - 200 = 4450 - = \text{des zweyten Theil}$$
$$x - 300 = 4350 - = \text{des ältesten Theil.}$$

18000 rthlr.

Diese Aufgabe hätte auch allgemein so ausgedruckt seyn können. Die Größe a soll so in vier Theile getheilt werden, daß der zweyte Theil um b, der dritte um 2b, der vierte um 3b größer sey, als der erste.

Setzt man nun den ersten Theil $= x$;
so ist der zweyte Theil $= x + b$
der dritte Theil $= x + 2b$
der vierte Theil $= x + 3b$

Folgl. die Fundamentalgleichung $4x + 6b = a$

$$\text{F. } 4x = a - 6b$$

$$4) \quad \text{F. } x = \frac{a - 6b}{4}.$$

Setzt man nun $a = 18000$, $b = 100$, so bekommt man die vorigen Theile.

7.

2. Aufgabe. Die Größe a soll in zwey Theile getheilt werden, so daß der größre Theil um $\frac{1}{n}$ des kleinern größer sey, als der kleinere. Welches werden nun die beyden Theile seyn?

Setzt man den kleinern Th. = x

so ist der größre Theil = $x + \frac{x}{n}$

Folgl. beyde Theile zusamm. = $2x + \frac{x}{n} = a$ (n

$2nx + x = an$

$2nx + x = x(2n + 1)$

F. $x(2n+1) = an$

F. $x = \frac{an}{2n+1}$ = dem kleinern Theil

F. der größre oder $x + \frac{x}{n} = \frac{an}{2n+1} + \frac{an}{(2n+1)n}$

$= \frac{an^2 + an}{(2n+1)n}$

$= \frac{an(n+1)}{n(2n+1)}$

$= \frac{a(n+1)}{2n+1}$

Wäre nun die zu theilende Größe oder $a = 33$, der größre Theil aber um $\frac{1}{5}$ des kleinern größer, als der kleinere; so wäre

der kleinere Theil oder $x = \frac{33 \cdot 5}{2 \cdot 5 + 1} = \frac{165}{11} = 15$

der größre Theil aber $= \frac{a(n+1)}{2n+1} = \frac{33 \cdot 6}{11} = 18$ } 33.

8.

3te Aufgabe. Ein Vater verordnet in seinem letzten Willen, daß seine schwangere Frau, wenn sie mit einem Sohn darnieder kommen würde, $\frac{1}{3}$, der Sohn aber $\frac{2}{3}$; würde sie aber eine Tochter gebähren, umgekehrt $\frac{2}{3}$, die Tochter aber $\frac{1}{3}$ von seinem Vermögen haben solle. Weil aber die Mutter mit einem Sohn und einer Tochter niederkommt, so frägt sichs, wie das Vermögen, daß sich auf 66500 rthlr. beläuft, nach dem Willen des Vaters zu vertheilen sey.

Man

Man sieht bald, daß des Vaters Wille sey, der Sohn soll doppelt so viel als die Mutter, diese aber doppelt so viel als die Tochter haben. Wüßte man nun den Theil der Tochter, als den einfachsten, so würde dieser doppelt genommen den Antheil der Mutter, und dieser doppelt, oder der Tochter Theil viermahl genommen, des Sohnes Antheil geben. Setzt man nun der T. Theil = x, so ist nach den Beding.

der Aufg. der Mutter Th. = 2x
Folgl. des Sohns Antheil = 4x

F. 7x = 66500

7)

F. x = $\frac{66500}{7}$ = 9500 thlr.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Folglich der Mutter Theil | = 2x = | 19000 | • |
| und des Sohns Theil | = 4x = | 38000 | • |
| | | 66500 | thlr. |

9.

4te Aufgabe. Es will jemand eine gewisse Anzahl Schaafe kaufen, und soll das Stück durch die Bank mit 4 Floren bezahlen; weil ihm aber dann an der ganzen Summe 20 Floren fehlen würden, so will er fürs Stück nur $3\frac{1}{2}$ Fl. zahlen, und dann würde er noch 8 Fl. übrig behalten. Wie viel Floren hat er gehabt, und wie viel Schaafe hat er kaufen wollen?

Man setze, er habe nur gehabt x Fl.

Hätte er nun das Stück mit 4 Fl. bezahlen wollen, so hätte er müssen x + 20 Fl. haben.

Folglich war die Anzahl der Schaafe = $\frac{x+20}{4}$.

Hätte er aber fürs Stück nur $3\frac{1}{2}$ Fl. bezahlt, so hätte er nur x — 8 Fl. gebraucht.

Folglich war die Anzahl der Schaafe $= \frac{x-8}{3\frac{1}{2}}$.

Es müssen also beyde Ausdrücke für die Anzahl der Schaafe einander gleich seyn.

Folgl. $\frac{x-8}{3\frac{1}{2}} = \frac{x+20}{4}$. Man multipl. die Nenner in 2.

$$\frac{\frac{x-8}{7} = \frac{x+20}{8}}{(56 = 7.8}$$

$$8x-64 = 7x+140$$

$$8x-7x = 140+64$$

$$x = 204 \text{ Fl.}$$

F. Anzahl der Schaafe $=$

$\frac{x-8}{3\frac{1}{2}} = \frac{204-8}{3\frac{1}{2}} = \frac{196}{3\frac{1}{2}} = \frac{392}{7} = 56$ St.

$\frac{x+20}{4} = \frac{204+20}{4} = \frac{224}{4} = 56.$

Man hätte aber auch zuerst die Anzahl der Schaafe suchen, und daraus dann die Summe der Floren bestimmen können.

Gesetzt nun, die Anzahl der Schaafe sey gewesen $= y$ so kosteten, das Stück zu 4 Fl., alle zusammen $4y$; weil ihm aber dann 20 Fl. gefehlt hätten, so hatte er nur $4y - 20$ Fl. bey sich. Bezahlte er aber das Stück nur mit $3\frac{1}{2}$ Fl., so brauchte er nur $\frac{7y}{2}$ Fl., und dann hätte er noch 8 Fl. übrig behalten, folglich hatte er $\frac{7y}{2} + 8$ Fl.

Es muß also jener Ausdruck für die gehabte Summe dem letzten Ausdruck gleich seyn, oder

$$4y - 20 = \frac{7y}{2} + 8$$

$$8y - 40 = 7y + 16$$

$$8y - 7y = 16 + 40$$

F. $y = 56 =$ der Anzahl Schaafe.

Folgl.

Folgl. hatte er $\begin{cases} 56.4 - 20 = 224 - 20 = 204 \text{ Fl.} \\ 56.3\frac{1}{2} + 8 = 196 + 8 = 204 \text{ Fl.} \end{cases}$

10.

Die Größen aber, wodurch die unbekannte Größe bestimmt wird, sind nicht allemahl geradezu in der Aufgabe ausgedrückt, sondern müssen oft erst durch verschiedene Rechnungsarten, insbesondere aber durch die Proportionsregel gesucht werden. Von der Art sind folgende Aufgaben.

5te Aufgabe. Einem Bothen A, welcher in 3 Stunden 2 Meilen zurücklegt, wird nach 24 Stunden ein anderer B nachgeschickt, welcher in 4 Stunden 5 Meilen zurücklegt. Wie viel Meilen müssen beyde reisen, ehe B den A einholt?

Man setze die Anzahl Meilen, die beyde reisen müssen, ehe der letzte den ersten erreicht = x.

Es besteht aber offenbar die Reise des ersten aus zwey Theilen, nemlich 1) aus demjenigen, den er in den 24 Stunden zurücklegt, welche er früher abgereiset ist; 2) aus dem Theil, den er noch in der Zeit zurücklegt, welche B braucht ihn einzuholen. Man bestimme also

1. Die Stunden die B braucht zu dem ganzen Wege = x.

$$5^{\text{Meilen}} : x^{\text{Meilen}} = 4^{\text{Stunden}} : \frac{4x}{5}^{\text{Stunden}}.$$

2. Die Meilen, die A zurücklegt

a) in den 24 Stunden, die er früher abgereiset ist.

$$3^{\text{Stunden}} : 24^{\text{Stunden}} = 2^{\text{Meilen}} : 16^{\text{Meilen}}$$

b) in den $\frac{4x}{5}$ Stunden die B braucht ihn einzuholen.

$$3^{\text{Stunden}} : \frac{4x}{5}^{\text{Stunden}} = 2^{\text{Meilen}} \quad \frac{8x}{15}^{\text{Meilen}}$$

Folglich ist der ganze Weg des A = $16 + \frac{8x}{15}$ Meilen.

Folglich $x = 16 + \frac{8x}{15}$ (15

$15x = 240 + 8x$

F. $15x - 8x = 240$

$7x = 240$

7)

F. $x = 34\frac{2}{7}$ Meilen.

6te Aufgabe. A reiset mit der ordinairen Post des Dienstags Vormittags um 11 Uhr von Frankfurt an der Oder über Breslau nach Warschau und legt in 2 Stunden wie gewöhnlich 1 Meile zurück. B reiset mit einer andern Gelegenheit von Berlin, welches noch 10 Meilen weiter von Warschau liegt, denselben Weg eben dahin des Mittwochs Nachmittags um 3 Uhr, und legt in 4 Stunden 3 Meilen zurück. Wie viel Meilen muß B reisen, ehe er A einholt?

A hat hier einen doppelten Vortheil. 1) Er reiset von Frankfurt ab, welches Warschau 10 Meilen näher liegt, als Berlin. 2) Er reiset 28 Stunden früher ab; denn vom Dienstage früh um 11 Uhr bis Mittwochs Nachmittags um 3 Uhr sind 28 Stunden.

Man setze die ganze Reise des B $= x$, und berechne, wie viel Stunden er dazu braucht, durch folgende Proportion.

3 Meilen : x Meilen $=$ 4 Stunden : $\frac{4x}{3}$ Stunden

Nun berechne man für A

1. Wie viel Meilen er in den 28 Stunden zurücklegt, welche er früher abgereiset ist, indem man schließt:

2 Stunden : 28 Stunden $=$ 1 Meile : 14 Meilen.

2. Wie

2. Wie viel Meilen er noch in den $\frac{4x}{3}$ Stunden, die B zu seiner Reise braucht, zurücklegt, durch folgende Propotion:

$$2 \text{ Stunden} : \frac{4x}{3} \text{ Stunden} = 1 \text{ Meile} : \frac{4x}{6} \text{ Meilen} = \frac{2x}{3} \text{ Meilen}$$

Rechnet man nun noch zu den gefundenen 14 und $\frac{2x}{3}$ Meilen die 10 Meilen, die A voraus hat in Ansehung der Lage der Oerter, so ist der Weg des $A = 14 + \frac{2x}{3} + 10$ Meilen. Also

B A

$$x = 14 + \tfrac{2}{3}x + 10 \quad (3$$

$$3x = 42 + 2x + 30$$

$$3x - 2x = 42 + 30$$

$$x = 72 \text{ Meilen.}$$

Da nun Warschau von Berlin 90 Meilen entfernt ist, so treffen sie einander 18 Meilen vor Warschau. A aber hat bis dahin nur 62 Meilen reisen dürfen.

II.

Setzt man anstatt der bestimmten Zahlen in dieser Aufgabe allgemeine Zeichen und sucht dann den Werth für x, so erhält man eine allgemeine Formel für ähnliche Exempel.

Man setze also die Entfernung der beyden Orte der Abreise $= a$.

Die Stunden die der langsamer Reisende oder A früher abreiset $= b$.

Die Geschwindigkeit des A sey $= \frac{c \text{ Meilen}}{d \text{ Stunden}}$, das heißt: A lege c Meilen in d Stunden zurück.

Die

Die Geschwindigkeit des geschwinder Reisenden oder B sey $= \frac{e \text{ Meilen}}{f \text{ Stunden}}$, das heißt: B lege e Meilen in f Stunden zurück.

Die Anzahl Meilen, die B zurücklegen muß, ehe er A einholt $=$ x.

Man berechne dann

1. Die Stunden die B braucht zu diesen x Meilen aus seiner gegebenen Geschwindigkeit, indem man schließt:

$$e^{\text{Meilen}} : x^{\text{Meilen}} = f^{\text{Stunden}} : \frac{fx}{e}^{\text{Stunden}}$$

2. Die Meilen, die A zurücklegen kann
   a) in den b Stunden, die er früher abreiset, aus seiner bekannten Geschwindigkeit, indem man schließt:

$$d^{\text{Stunden}} : b^{\text{Stunden}} = c^{\text{Meilen}} : \frac{bc}{d}^{\text{Meilen}}$$

   b) in den $\frac{fx}{e}$ Stunden, welche B zu seiner ganzen Reise braucht, also wieder wie vorhin

$$d^{\text{Stunden}} : \frac{fx}{e}^{\text{Stunden}} = c^{\text{Meilen}} : \frac{cfx}{de}^{\text{Meilen}}$$

A muß also wirklich $\frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$ Meilen reisen, ehe B ihn einholt; es sind aber nun noch die a Meilen übrig, um welche der Abreise Ort des A dem Ort der Bestimmung näher liegt, als der Abreise Ort des B. Da also A von diesem näher liegenden Ort abreiset, so hat er auch die a Meilen voraus, und müssen also zu den Meilen, die er wirklich reisen muß, noch hinzugethan werden, und dann ist die Reise des B oder x Meilen $=$ erstlich, den a Meilen, die er zurücklegen muß, ehe er den Ort der Abreise des A erreicht. 2) Den $\frac{bc}{d}$ Meilen, die

A in den b Stunden zurücklegt, die er früher abreiset und 3) den $\frac{cfx}{de}$ Meilen, die A noch in den $\frac{fx}{e}$ Stunden zurücklegen kann, welche B zu seinem ganzen Wege braucht; folglich ist

$$x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$$

$$\frac{de}{dex = ade + bce + cfx}$$

$$dex - cfx = ade + bce$$

$$\text{F. } x = \frac{ade + bce}{de - cf}$$

12.

Vermittelst dieser Formel läßt sich nun die sechste Aufgabe §. 10. sogleich auflösen, wenn man anstatt der allgemeinen Zeichen dieser Formel jene bestimmten Zahlen setzt. Die Aufgabe selbst war:

A reiset von Frankfurt über Berlin nach Warschau und legt in 2 Stunden eine Meile zurück. B reiset 28 Stunden später von Berlin, welches noch 10 Meilen weiter von Warschau liegt, ab, und endet in 4 Stunden 3 Meilen. Wo wird der letzte den ersten einholen? Hier ist $a = 10$ Meilen, $b = 28$ Stunden, $c = 1$ Meile, $d = 2$ Stunden, $e = 3$ Meilen und $f = 4$ Stunden.

Folgl. $x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{10.2.3 + 28.1.3}{2.3 - 1.4} = \frac{60 + 84}{2} =$

$= \frac{144}{2} = 72$ Meilen, wie oben §. 10.

13.

Es dient aber eben diese Formel §. 11. auch zur Auflösung der weniger verwickelten fünften Aufgabe §. 10. Sie hieß:

A legt

A legt in 3 Stunden 2 Meilen zurück. Nach 24 Stunden reiset ihm von demselben Orte aus B nach, der aber in 4 Stunden 5 Meilen zurücklegt. Wo wird der letzte den ersten einholen?

Hier ist a = 0, weil beyde von demselben Ort abreisen.
b = 24 Stnden, welche A früher abreist als B.
c = 2 Meilen, d = 3 Stunden } Geschwindigkeit des A.
e = 5 Meilen, f = 4 Stunden } Geschwindigkeit des B.

Folgl. $x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{0 \cdot 3 \cdot 5 + 24 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{240}{15 - 8} =$

$\frac{240}{7} = 34\frac{2}{7}$ Meilen, wie oben §. 10.

14.

7te Aufgabe. Vermittelst einer gewissen Maschine ist eine Arbeit = a in der Zeit = b; durch eine andere Maschine ist eine Arbeit von gleicher Art = c in der Zeit = d; durch eine dritte Maschine ist die Arbeit = e in der Zeit = f zu Stande gebracht. Wie viel Zeit wird erfordert werden, die Arbeit = q zu vollenden, wenn alle drey Maschinen dabey helfen?

Man setze diese Zeit sey = x, und berechne aus dem gegebenen Verhältniß der Zeit zur Wirkung, wie viel durch jede Maschine besonders in dieser Zeit = x gefördert werden könne.

Erste Maschine. b Zeit : x Zeit = a Arbeit : $\frac{ax}{b}$ Arbeit
Zweite Maschine d Z. : x Z. = c A. : $\frac{cx}{d}$ A.
Dritte Maschine f Z. : x Z. = e A. : $\frac{ex}{f}$ A.

Die

Die gefundene Arbeit nun aller drey Maschinen zusammen in der Zeit = x muß der Arbeit = q gleich seyn od r

$$\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f} = q \qquad (bdf$$

F. $adfx + bcfx + bdex = bdfq.$

$$\underline{adfx + bcfx + bdex = x(adf + bcf + bde)}$$

F. $\underline{x(adf + bcf + bde) = bdfq.}$

F. $x = \frac{bdfq}{adf + bcf + bde.}$

Die gesuchte Zeit ist also gleich dem Product aus der zu fördernden Arbeit q in die gegebenen Zeiten bdf in einander multiplicirt, und durch die Summe so vieler Producte, als Maschinen im Gange sind, wovon jedes aus eben so viel Factoren besteht, davon der eine eine gegebene Arbeit, nemlich a, c und e, die andern aber die gegebenen Zeiten nemlich df, bf und bd der übrigen Maschinen sind.

Weiß man dies, so ists leicht, für jeden noch mehr zusammen gesetzten Fall die Formel, wodurch x bestimmt wird, anzufertigen. Denn wenn z. B. der gehenden Maschinen fünf wären, durch welche die Arbeit = q zu Stande gebracht werden sollte, da die vierte die Wirkung = g in der Zeit = h, die fünfte die Wirkung = i in der Zeit = k hervorbringen könnte, so wäre

$$x = \frac{bdfhkq.}{a.dfhk + c.bfhk + e.bdhk + g.bdfk + i.bdfh.}$$

15.

Die Anwendung dieser Aufgabe findet in allen den Fällen statt, wo gefragt wird, wie viel Zeit eine gewisse Anzahl gleichartiger Dinge brauchen werde,

um

um gemeinschaftlich eine gewisse Wirkung hervorzubringen, wenn man weiß, wie viel jedes Ding für sich in einer bestimmten Zeit zu leisten im Stande ist. Es gehören hieher folgende Exempel.

1. Exempel. In einen Behälter, dessen Länge = 60½ Fuß, die Breite = 20 Fuß und die Tiefe = 10 Fuß, der also 12100 Cubicfuß hält, ergießen sich vier Röhren, davon

die erste in 2 Stunden 3 Cubicfuß,
die zweyte in 4 — 5 —
die dritte in 6 — 7 —
die vierte in 8 — 9 — Wasser schüttet; es frägt sich, wie viel Stunden diese vier Röhren zusammen laufen müssen, um diesen Wasserbehälter zu füllen?

Setzt man die zu suchende Anzahl Stunden = x, so ist in diesem Fall

$$x = \frac{2.4.6.8.12100.}{3.4.6.8 + 5.2.6.8 + 7.2.4.8 + 9.2.4.6} =$$

$$\frac{4646400}{576+480+448+432} = \frac{4646400}{1936} = 2400 \text{ Stunden}$$

= 100 Tage.

Probe.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Die erste liefert in | 2 | St. | 3 | Cubicf. | folgl. in | 2400 | St. | 3600 C.F. |
| die zweyte | — | — | 4 | 5 | — | — | — | 2400 3000 — |
| die dritte | — | — | 6 | 7 | — | — | — | 2400 2800 — |
| die vierte | — | — | 8 | 9 | — | — | — | 2400 2700 — |
| | | | | | | | | 12100 C.F. |

2. Exempel.

Ein Arbeiter verfertigt in 1 Tage 6 Stück, Ellen ꝛc.
ein anderer in 2 — 11 —
ein dritter in 1 — 5 —
ein vierter in 3 — 10 —
ein fünfter in 4 — 18 —
wie viel Tage werden sie zusammen brauchen um 730 Stück ꝛc. zu verfertigen? Hier ist x =

$$x = \frac{2.3.4.730}{6.2.1.3\,4 + 11.3.4 + 5\;2.3.4 + 10.2.4 + 18.2.3} =$$

$$\frac{17520}{144 + 132 + 120 + 80 + 108} = \frac{17520}{584} = 30 \text{ Tage.}$$

## 16.

8te Aufgabe. Es hat jemand von einer Waare zwey Sorten von verschiedener Güte. Von der bessern schätzt er eine gewisse Quantität $= a$, von der geringern $= b$. Weil sich aber zur letzten keine Käufer finden, so will er sie mit der ersten vermischen, so daß er dieselbe Quantität $= c$ setzen kann. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Man setze den bessern Theil in dem bestimmten Quantum vom vermischten $= x$,
so ist der schlechtere Theil $= 1 - x$
Wenn nun der Werth der Einheit des bessern $= a$;
so ist der Werth des Theils $x = ax$.
Und wenn der Werth der Einheit des geringern $= b$;
so ist der Werth des Theils $1 - x = b - bx$.
Folglich beyde Theile zusammen gleich dem Werth des vermischten, oder

$$ax + b - bx = c$$

$$\text{F } ax - bx = c - b$$

$$\text{F. } x = \frac{c-b}{a-b}.$$

$$\text{F. } 1 - x = 1 - \frac{c-b}{a-b} = \frac{a-b-c+b}{a-b} = \frac{a-c}{a-b}.$$

1. Exempel. Ein Kaufmann hat zweyerley Sorten Reiß; das Pfund zu 2 Gr. und zu 1 Gr 4 Pf. Um auch die schlechtere Sorte absetzen zu können, will er sie mit der bessern vermischen, so daß er das Pfund für 1 Gr. 8 Pf. verkaufen kann. Wie viel

würde er also von jeder Sorte zu einem Pfunde nehmen müssen?

Hier ist a = 2 Gr., b = $1\frac{1}{3}$ Gr. und c = $1\frac{2}{3}$ Gr.

Er muß also von der bessern Sorte nehmen $= \frac{1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}}{2 - 1\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ℔.

Folgl. von der geringern Sorte $= 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ℔.

Probe.

Von der bessern Sorte 1 ℔ : $\frac{1}{2}$ ℔ = 2 Gr. : 1 Gr.

von der gering. Sorte 1 ℔ : $\frac{1}{2}$ ℔ = $1\frac{1}{3}$ gr. : $\frac{2}{3}$ Gr.

Folglich vom vermischten das Pfund = $1\frac{2}{3}$ Gr.

2. Exempel. Ein Weinschenker hat zweyerley Sorten Rheinwein, das Quart zu 1 rthlr. 16 Gr. und zu 20 Gr. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen, um das Quart zu 1 rthlr. 8 Gr. verkaufen zu können?

Hier ist a = $1\frac{2}{3}$ thl. = 40 gr., b = 20 gr. u. c = $1\frac{1}{3}$ thl. = 32 gr.

Folgl. $x = \frac{32 - 20}{40 - 20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ Quart vom bessern.

und $1 - x = \frac{40 - 32}{40 - 20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ Quart v. schlechtern.

Folglich muß er 3 Quart vom bessern und 2 Quart vom schlechtern zu 5 Quart nehmen, wovon er dann das Quart für $1\frac{1}{3}$ rthlr. verkaufen kann.

3. Exempel. Ein Goldschmidt hat 15 löthiges und 10 löthiges Silber, braucht aber zu einer gewissen Arbeit 14 löthiges, das heißt solch Silber, wovon die Mark 14 Loth rein Silber und 2 Loth Zusatz enthält. Wie viel muß er von jeder Sorte bey Beschickung des Tiegels nehmen, um das verlangte Silber zu erhalten?

Hier ist a = 15, b = 10 und c = 14.

Folg-

Folglich $x = \frac{c \quad b}{a - b} = \frac{14 - 10}{15 \quad 10} = \frac{4}{5}$ Mark vom 15 löth.

und $1 - x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ Mark vom 10 löth.

## 17.

Bey manchen Aufgaben muß man erst sehr weitläuftige Vorbereitungen machen, ehe man die Fundamentalgleichung erhält. Von der Art ist unter andern folgende Aufgabe.

9te Aufgabe. Von einem gewissen Capital wurden jährlich 1200 rthlr. ausgegeben, dagegen aber wurde jährlich auch wieder so viel gewonnen, daß der jedesmalige Rest um die Hälfte desselben vermehrt wurde. Da man nun nach 4 Jahren dasselbe bis auf $187\frac{1}{2}$ rthlr. dreymahl größer fand, so wird gefragt, wie groß dasselbe anfänglich gewesen und wie groß es nach Verlauf von vier Jahren gewesen.

Man setze, das erste Capital sey gewesen $= x$.

1stes Jahr. Ausgabe $= 1200$

$$\text{F Rest} = x - 1200$$

$$\text{Gewinn} = \frac{x - 1200}{2}$$

$$\text{F. Capit. am Schluß des 1. Jahrs} = x - 1200 + \frac{x - 1200}{2}$$

$$= \frac{2x - 2400 + x - 1200}{2}$$

$$= \frac{3x - 3600}{2}$$

2tes Jahr. Ausg. $= 1200$ rthlr.

$$\text{F. Rest} = \frac{3x - 3600}{2} - 1200 = \frac{3x - 3600 - 2400}{2}$$

$$= \frac{3x - 6000}{2}$$

$$\text{Gewinn} = \frac{3x - 6000}{4}$$

F. Capital am Schluß des 2ten J. $= \frac{3x-6000}{2} + \frac{3x-6000}{4}$

$= \frac{6x-12000+3x-6000}{4}$

$= \frac{9x-18000}{4}$

3tes Jahr. Ausg. $= 1200$.

F. Rest $= \frac{9x-18000}{4} - 1200 = \frac{9x-18000-4800}{4}$

$= \frac{9x-22800}{4}$

Gewinn $= \frac{9x-22800}{8}$

F. Capit. am Schluß des 3ten J. $= \frac{9x-22800}{4} + \frac{9x-22800}{8}$

$= \frac{18x-45600+9x-22800}{8}$

$= \frac{27x-68400}{8}$

4s Jahr. Ausg. $= 1200$

F. Rest $= \frac{27x-68400}{8} - 1200 = \frac{27x-68400-9600}{8}$

$= \frac{27x-78000}{8}$

Gewinn $= \frac{27x-78000}{16}$

F. Capit. am Schluß des 4. J. $= \frac{27x-78000}{8} + \frac{27x-78000}{16}$

$= \frac{54x-156000+27x-78000}{16}$

$= \frac{81x-234000}{16}$

Da nun dies Capital dreymahl größer seyn soll als das erste Capital weniger $187\frac{1}{2}$ rthlr., so erhält man folgende Fundamentalgleichung aufzulösen.

$$\frac{81x - 234000}{16} = 3x - 187\frac{1}{2}$$

$$81x - 234000 = 48x - 3000$$

$$81x - 48x = 234000 - 3000$$

$$33x = 231000$$

$$x = 7000 \text{ rthlr.}$$

Probe.

| | | |
|---|---|---|
| Erstes Capital | = | 7000thlr. |
| 1stes Jahr. Ausgabe | = | 1200 . |
| Rest | = | 5800 . |
| Gewinn = dem halben Rest | = | 2900 . |
| Capital am Schluß des ersten Jahrs | = | 8700 . |
| 2tes Jahr. Ausgabe | = | 1200 . |
| Rest | = | 7500 . |
| Gewinn = dem halben Rest | = | 3750 . |
| F. Capit. am Schluß des 2ten Jahrs | = | 11250 . |
| 3tes Jahr. Ausgabe | = | 1200 . |
| Rest | = | 10050 . |
| Gewinn = dem halben Rest | = | 5025 . |
| F. Capit. am Schluß des 3ten Jahrs | = | 15075 . |
| 4tes Jahr. Ausgabe. | = | 1200 . |
| Rest | = | 13875 . |
| Gewinn = dem halben Rest | = | $6937\frac{1}{2}$ . |
| F. Capit. am Schluß des 4ten Jahrs | = | $20812\frac{1}{2}$thl. |

Es ist aber wirklich $20812\frac{1}{2}$thl. = $3 \cdot 7000 - 187\frac{1}{2}$thl.

10te Aufgabe. In einer gewissen großen Stadt sind in einem Jahre veracciset:

Kälber, drey und ein halbmahl so viel als Ochsen und noch 100 Stück darüber. Hammel eben so

viel als Kälber und der fünfte Theil der Ochsen weniger 50 Stück. Schweine halb so viel als Ochsen, Kälber und Schaafe und noch 1000 Stück drüber. Ueberhaupt aber sind 40585 Stück veracciset worden. Es frägt sich, wie viel von jeder Viehart besonders?

Man darf nur die Anzahl der Ochsen suchen, so lassen sich dann die übrigen daraus bestimmen.

Es sey also die Anzahl der Ochsen gewesen $= x$.

so waren Kälber $= \frac{7}{2}x + 100$.

und Hammel $= \frac{7}{2}x + 100 + \frac{x}{5} - 50$.

$= \frac{35x}{10} + 100 + \frac{2x}{10} - 50 = \frac{37x}{10} + 50$.

und Schweine $= \frac{x}{2} + \frac{7}{4}x + 50 + \frac{37x}{20} + 25 + 1000$

$= \frac{10x}{20} + \frac{35x}{20} + \frac{37x}{20} + 1075$.

$= \frac{82x}{20} + 1075$.

O. K. H. S.

$F.\ x + \frac{7x}{2} + 100 + \frac{37x}{10} + 50 + \frac{82x}{20} + 1075 = 40585$ (20

$20x + 70x + 2000 + 74x + 1000 + 82x + 21500 = 811700$

$20x + 70x + 74x + 82x = 811700 - 2000 - 1000 - 21500$

$246x = 787200$

246)

Folgl. $x = \frac{787200}{246} =$ 3200 = Anz. Ochsen

F. Kälber $= 3200 \cdot 3\frac{1}{2} + 100 =$ 11300

Hammel $= 11300 + \frac{3200}{5} - 50 =$ 11890.

Schweine $= \frac{3200 + 11300 + 11890}{2} + 1000 =$ 14195.

40585 Stück.

2. Wenn

## 2. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in der Aufgabe enthalten sind.

### 18.

Enthält eine Aufgabe mehr als eine unbekannte Größe, so muß man die Bedingungen der Aufgabe in so viel besondre Gleichungen auszudrücken suchen, als unbekannte Größen gesucht werden sollen. Diese Art Aufgaben werden aufgelöset, wenn man entweder aus zwey Gleichungen den Werth einer und derselben unbekannten Größe sucht und dann aus diesen beyden Werthen eine neue Gleichung formirt.

Oder wenn man den Werth der einen unbekannten Größe aus der einen Gleichung sucht, der denn freylich noch nicht ganz bestimmt seyn kann, und ihn dann in der zweyten Gleichung für diese darin enthaltene unbekannte Größe setzt, dadurch erhält man eine Gleichung, in der nun schon eine unbekannte Größe weniger ist, durch deren Auflösung, wenn nur zwey unbekannte Größen gesucht werden, die andere unbekannte Größe völlig bestimmt wird; werden aber mehr, als zwey Größen gesucht, so muß dies Verfahren wiederholt werden.

Oder man kann auch durchs Addiren und Subtrahiren der Gleichungen machen, daß sich die unbekannten Größen nach und nach verlieren.

Welcher Art man sich vor der andern zu bedienen habe, müssen die Bestimmungen in der Aufgabe entscheiden. Das Verfahren selbst aber läßt sich am besten in Beyspielen zeigen.

### 19.

111te Aufgabe. Zwey unbekannte Größen. Es ist gegeben die Summe $= s$ und die Differenz $= d$

zweyer Größen, man soll daraus die Größen selbst bestimmen.

Man setze die größre Größe $= x$, die kleinere $= y$.

1. Wenn man aus dem doppelten Werth der einen unbekannten Größe eine neue Gleichung formirt.

I. $s = x + y$ II. $d = x - y$

F. $x = s - y$. F $x = d + y$.

F. $s - y = d + y$

$2y = s - d$

$y = \frac{s - d}{2}$

vorhin war II. $x = d + y$

$y = \frac{s - d}{2}$

F. $x = d + \frac{s - d}{2}$

F. $x = \frac{2d + s - d}{2}$

F. $x = \frac{s + d}{2}$.

Es ist also die größre Größe gleich der halben Summe plus der halben Differenz; die kleinere gleich der halben Summe minus der halben Differenz. Man kann das Resultat dieser Auflösung als einen erwiesenen Satz betrachten, dessen man sich in vielen Fällen mit Vortheil bedienen kann.

2. Wenn man den Werth einer unbekannten Größe in einer andern Gleichung an ihre Stelle setzt.

Weil I. $s = x + y$

so ist $x = s - y$.

Und

Und weil II. $d = x - y$

so ist $y = x - d$

$x = s - y$ (I)

$y = s - y - d$

$2y = s - d$

F. $y = \frac{s - d}{2}$

$x = s - y$ (I)

F. $x = s - \frac{s - d}{2}$

$x = \frac{2s - s + d}{2}$

F. $x = \frac{s + d}{2}$.

3. Wenn man die beyden Gleichungen so wohl addirt, als auch von einander abzieht, da denn, wie leicht zu begreifen, eine unbekannte Größe wegfällt.

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll seyn

I. $x + y = s$. II. $x - y = d$.

Man addire beyde Gleichungen.

I. $x + y = s$

II. $x - y = d$

F. $2x = s + d$

F. $x = \frac{s + d}{2}$.

Man ziehe ferner eine Gleichung von der andern ab. Bey geringem Nachdenken findet man, daß man die kleinere von der größern abziehen müsse, da nun d oder die Differenz nothwendig kleiner seyn muß, als s oder als die Summe, so wird man auch

d und dessen Werth von s und seinem Werth abziehen müssen, nicht aber umgekehrt.

$$\text{I.} \quad x + y = s$$
$$\text{II.} \quad x - y = d$$
$$- \quad + \quad -$$
$$\text{F. } 2y = s - d$$
$$\text{F. } y = \frac{s-d}{2}.$$

Es sey z. B. die Summe $= s = 15$, die Differenz $= d = 3$, so ist

die größre Zahl $= \frac{15+3}{2} = \frac{18}{2} = 9$

die kleinere Zahl $= \frac{15-3}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Es ist aber $9 + 6 = 15 = s$ und $9 - 6 = 3 = d$.

20.

12te Aufgabe. Zwey unbekannte Größen. Aus dem specifischen Gewicht zweyer mit einander vermischten Metalle, dem Inhalt und Gewicht der ganzen Masse, den Inhalt jeder Species, woraus das Mixtum besteht, besonders zu finden.

Die Größe oder der cörperliche Inhalt des Mixtum so wohl, als auch jeder Species besonders sey durch Cubiczoll ausgedrückt, und zwar sey

der cörperliche Inhalt der ganzen Masse $= m$.
das Gewicht der ganzen Masse $= p$.
der cörperliche Inhalt der einen Species $= x$.
das specifische Gewicht derselben $= g$.
der cörperliche Inhalt der andern Species $= y$.
das specifische Gewicht derselben $= \gamma$.

Folglich ist das Gewicht der Species, deren Inhalt $= x$ ist, $= gx$;

denn wie 1 Cubiczoll : x C. Z. $= g : gx$.

Eben so ist das Gewicht der Species, deren Inhalt $= y$ ist, $= \gamma y$.

Da

Da nun beyde Species die ganze Masse ausmachen, so muß die Masse auch so viel wiegen, als die beyden Species zusammen.

Folglich $gx + \gamma y = p$.

und $gx = p - \gamma y$

F. $x = \frac{p - \gamma y}{g}$.

Es muß aber auch der cörperliche Inhalt der ganzen Masse gleich seyn dem cörperlichen Inhalt der beyden Species zusammen, oder

$x + y = m$

F. $x = m - y$.

vorhin war $x = \frac{p - \gamma y}{g}$

Es ist also $\frac{p - \gamma y}{g} = m - y$ (g

$p - \gamma y = gm - gy$

und $gy - \gamma y = gm - p$

F. $y = \frac{gm - p}{g - \gamma}$.

Man substituire nun in einer von den Gleichungen $x = \frac{p - \gamma y}{g}$ oder $x = m - y$ diesen für y gefundenen Werth; also

$x = m - y$

$y = \frac{gm - p}{g - \gamma}$

also $x = m - \frac{gm - p}{g - \gamma}$.

oder $x = \frac{gm - \gamma m - gm + p}{g - \gamma}$

F. $x = \frac{p - \gamma m}{g - \gamma}$

Gesetzt

Gesetzt nun das Mixtum bestünde aus Gold und Silber, und wiege 36 Mark. Sein cörperlicher Inhalt sey $28\frac{4}{5}$ Cubiczoll. Ferner das specifische Gewicht des Goldes sey = $12\frac{2}{3}$ Unzen, das specifische Gewicht des Silbers = $6\frac{8}{9}$ Unzen, das heißt: 1 Cubiczoll Gold wiegt $12\frac{2}{3}$ und 1 Cubiczoll Silber $6\frac{8}{9}$ Unzen.

Man muß aber gleich Anfangs entweder die Unzen auf Mark reduciren, oder besser die Mark in Unzen resolviren, und dann sind 36 Mark = 288 Unzen.

Es ist also hier m = $28\frac{4}{5}$ Cubiczoll, p = 288 Unzen, g = $12\frac{2}{3}$ Unzen und γ = $6\frac{8}{9}$ Unzen; folglich

1. Inhalt des Goldes oder $x = \frac{p - \gamma m}{g - p} = \frac{288 - 6\frac{8}{9} \cdot 28\frac{4}{5}}{12\frac{2}{3} - 6\frac{8}{9}}$

$= \frac{288 - 198\frac{2}{5}}{5\frac{7}{9}} = 15\frac{33}{65}$ C. Z.

2. Inhalt des Silbers oder $y = \frac{gm - p}{g - p} = \frac{12\frac{2}{3} \cdot 28\frac{4}{5} - 288}{5\frac{7}{9}}$

$= \frac{364\frac{4}{5} - 288}{5\frac{7}{9}} = 13\frac{19}{65}$ C. Z.

## Probe.

$15\frac{33}{65}$ C. Z. Gold + $13\frac{19}{65}$ C. Z. Silber = $28\frac{4}{5}$ Cub. Z.

## Anmerkung.

Wenn das Mixtum aus andern Metallen als aus Gold und Silber, z. B. aus Zinn und Bley besteht, so läßt sich aus den gegebenen Stücken der cörperliche Inhalt dieser beyden Species besonders nicht erforschen, weil diese nach der Vermischung einen kleinern Raum, als vor der Vermischung einnehmen, d. i. 1 Cubiczoll Zinn und 1 Cubiczoll Bley sind in der Composition nicht mehr 2 Cubiczoll.

## 21.

**13te Aufgabe. Zwey unbekannte Größen.** Aus dem gegebenen Verhältniß m : n zweyer Größen und dem Verhältniß o : p derselben um a verminderten Größen die Größen selbst zu bestimmen.

Es sey die eine Größe $= x$, die andere $= y$, und, wenn sie um a vermindert worden, die eine $= x - a$, die andere $= y - a$.

Nun soll seyn I. $x : y = m : n$

F. $nx = my$ (VII. §. 27.)

F. $x = \frac{my}{n}$.

II. $x - a : y - a = o : p$.

F. $px - ap = oy - ao$.

und $px = oy - ao + ap$

F. $x = \frac{oy - ao + ap}{p}$

vorhin war $x = \frac{my}{n}$

F. $\frac{my}{n} = \frac{oy - ao + ap}{p}$ (np

$mpy = noy - ano + anp$

$mpy - noy = anp - ano$

F. $y = \frac{an\,(p - o)}{mp - no}$

Oben war $x = \frac{my}{n}$

$y = \frac{an\,(p - o)}{mp - no}$

F. $x = \frac{am\,(p - o)}{mp - no}$.

Anwen-

Anwendung auf einen besondern Fall. Vor einem Treffen waren auf der einen Seite viermahl mehr, als auf der andern. Es blieben aber auf jeder Seite 75 Mann, und nun verhielt sich das erste Corps zum andern wie 9:2. Wie stark war jedes Corps vor und nach dem Treffen?

Hier ist $a = 75$, $m:n = 4:1$ und $o\ p = 9:2$

folglich $x = \frac{75 \cdot 4(2-9)}{4.2-1\ 9} = \frac{300.-7}{8-9} = -\frac{2100}{1} = 2100.$

und $y = \frac{75 \cdot 1(2-9)}{4.2-1.9} = \frac{75.-7}{8-9} = -\frac{525}{-1} = 525.$

Probe.

| | das eine Corps. | | das andre C. | |
|---|---|---|---|---|
| vor dem Treffen | 2100 | : | 525 | = 4 : 1 |
| Verlust | 75. | | 75 | |
| nach dem Treffen | 2025 | : | 450 | = 9 : 2. |

22.

13te Aufgabe. Zwey unbekannte Größen. Man sucht zwey Größen, die so beschaffen sind, daß sich I. die erste minus zur zweyten plus einer gewissen dritten Größe verhält, wie m:n II. die erste aber plus zur zweyten minus derselben dritten Größe, wie o:p. Welches sind die beyden Größen?

Ist die erste Größe $= x$, die andere $= y$,

so soll seyn I. $x - a : y + a = m : n$

II. $x + a : y - a = o : p.$

Also I. $\frac{x - a : y + a = m : n}{nx - an = my + am.}$

$nx = my + am + an$

F. $x = \frac{my + am + an}{n}$

II.

II. $x + a : y - a = o : p.$

$$px + ap = oy - ao.$$

$$px = oy - ao - ap$$

$$x = \frac{oy - ao - ap}{p}$$

vorhin war $x = \frac{my + am + an}{n}$

$$\frac{cy - ao - ap}{p} = \frac{my + am + an}{n}.$$

$$noy - ano - anp = mpy + amp + anp$$

$$noy - mpy = anp + anp + ano + anp$$

$$= amp + 2anp + ano$$

$$y = \frac{a\,(mp + 2np + no}{no - mp}.$$

$$x = \frac{my + am + an}{n} \quad (I.)$$

$$x = \frac{a\,(m^2p + 2mnp + mno)}{n\,(no - mp)} + \frac{am + an}{n}$$

$$\frac{am + an}{n} = \frac{amno - am^2p + an^2o - amnp}{n\,(no - mp)}$$

$$x = \frac{am^2p + 2amnp + amno + amno - am^2p + an^2o - amnp}{n\,(no - mp)}$$

$$x = \frac{amnp + 2amno + an^2o}{n\,(no - mp)} = \frac{amp + 2amo + ano}{no - mp}$$

$$= \frac{a\,(mp + 2mo + no)}{no - mp}.$$

## Anwendung dieser Formel auf einen besondern Fall.

Cajus verlohr in dem einen Spiel an den Sempronius 50 rthlr., und nun verhielt sich des ersten Baarschaft zur Casse des Sempronius wie 2 : 3. Hätte aber Cajus dem Sempronius diese Summe abgewonnen, so würde sich des ersten Casse zur Casse

des

des andern verhalten haben, wie 4 : 5. Wie viel hat jeder Anfangs gehabt?

Hier ist $a = 50$, $m = 2$, $n = 3$, $o = 4$ und $p = 5$; folgl.

des Cajus Casse oder $x = \frac{50(2.5 + 2.2.4 + 3.4)}{3.4 - 2.5} = \frac{50.38}{2}$

$= 950$ rthlr.

des Sempr. C. oder $y = \frac{50(2.5 + 2.3.5 + 3.4)}{3.4 - 2.5} = \frac{50.52}{2}$

$= 1300$ rthlr.

## Probe.

| C. | S. |
|---|---|
| 950 | 1300 |
| $-50$ | $+50$ |
| 900 | 1350 |

$900 : 1350 = 2 : 3.$

| C. | S. |
|---|---|
| 950 | 1300 |
| $+50$ | $-50$ |
| 1000 | 1250 |

$1000 : 1250 = 4 : 5.$

Hätte man diesen Fall besonders auflösen wollen, so wäre gewesen

nach der Bedingung I. $x - 50 : y + 50 = 2 : 3$

$2y + 100 = 3x - 150$

$2y = 3x - 250$

F. $y = \frac{3x - 250}{2}$.

Nach der Bedingung II. $x + 50 : y - 50 = 4 : 5$

$4y - 200 = 5x + 250$

$4y = 5^x + 450.$

F. $y = \frac{5^x + 450}{4}$.

vorhin war $y = \frac{3^x - 250}{2}$

Folglich $\frac{3^x - 250}{2} = \frac{5^x + 450}{4}$ (4

$6x - 500 = 5x + 450$

$6x - 5^x = 450 + 500$

F. $x = 950$thl. F.

$$\text{F. } y = \frac{3 \cdot 950 - 250}{2}$$

$$= \frac{2850 - 250}{2}$$

$$= \frac{2600}{2} = 1300 \text{ thlr.}$$

23.

15te Aufgabe. Drey unbekannte Größen. Eine Größe $= a$ soll in drey Theile getheilt werden, so daß sich der erste Theil zum zweyten wie $m : n$, der erste Theil aber zum dritten wie $o : p$ verhalte. Welches sind die drey Theile?

Man setze den ersten Theil $= x$, den zweyten $= y$, den dritten $= z$,

so ist I. $x + y + z = a$.

II. $x : y = m : n$.

III. $x : z = o : p$.

Ist aber II. $x : y = m : n$ und ist $x : z = o : p$ (III)

so ist $my = nx$ so ist $oz = px$

$$\text{F. } y = \frac{nx}{m} \qquad \text{F. } z = \frac{px}{o}.$$

F. nach Nr. I. $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{o} = a$. (mo

$$mox + nox + mpx = amo.$$

$$\text{F. } x = \frac{amo}{mo + no + mp.}$$

$$\text{oder } x = \frac{amo}{o(m+n) + mp.}$$

vorhin war $y = \frac{nx}{m}$

$$\text{F. } y = \frac{n}{m} \cdot \frac{amo}{o(m+n)+mp}$$

$$\text{oder } y = \frac{ano}{o(m+n)+mp}$$

Ferner war $z = \frac{px}{o}$

F. $z = \frac{p}{o} \cdot \frac{amo}{o(m+n)+mp}$

oder $z = \frac{amp}{o(m+n)+mp}$.

Anwendung. Die Zahl 90 soll in drey solche Theile getheilt werden, daß sich der erste Theil verhält zum zweyten wie 1 : 2, zum dritten aber wie 1 : 3. Welches sind nun die drey Theile?

Hier ist $a = 90$, $m:n = 1:2$ und $o:p = 1:3$.

folgl. $x = \frac{90.1.1}{1.1+1.2+1.3} = \frac{90}{1+2+3} = \frac{90}{6} = 15$.

und $y = \frac{90.2.1}{6} = \frac{180}{6} = 30$

und $z = \frac{90.1.3}{6} = \frac{270}{6} = 45$

Probe.

$15:30 = 1:2$ und $15:45 = 1:3$.

Durch diese Formel läßt sich auch die dritte Aufgabe §. 8. auflösen. Denn setzt man der Tochter Theil $= x$, der Mutter Theil $= y$ und des Sohns Theil $= z$, und soll nach den Bedingungen im Testament seyn $x:y = 1:2$ $(y:z = 1:2)$

F. $x:z = 1:4$;

so ist $a = 66500$ thlr., $m = 1$, $n = 2$, $o = 1$ und $p = 4$.

F. der Tochter Th. oder $x = \frac{66560.1.1}{1.1+1.2+1.4} = \frac{66500}{7} =$ 9500 thlr.

der Mutter Th. oder $y = \frac{66500.2.1}{1.1+1.2+1.4} = \frac{133000}{7} =$ 19000 .

und des Sohns Th. oder $z = \frac{66500.1.4}{1.1+1.2+1.4} = \frac{266000}{7} =$ 38000 .

66500 thlr.

Es

Es ist aber 9500 : 19000 = 1 : 2 und 9500 : 38000 = 1 . 4.

## 24.

16te Aufgabe. Drey unbekannte Größen. Es bekommt jemand für 12 rthlr. 3 Scheffel Weizen, 4 Schfl. Roggen, 6 Schfl. Gerste. Für 24 rthlr. 6 Schfl. Weizen, 10 Schfl. Roggen und 9 Schfl. Gerste. Für 18 rthlr. 9 Schfl. Weizen, 2 Schfl. Roggen und 6 Schfl. Gerste. Wie hoch ist ihm der Scheffel von jeder Getreydeart angerechnet worden?

Setzt man vom Weizen den Scheffel = x rthlr. vom Roggen = y thlr. und von der Gerste = z thlr. so machen I. $3x + 4y + 6z = 12$.

II. $6x + 10y + 9z = 24$.

III. $9x + 2y + 6z = 18$.

Also I. $3x + 4y + 6z = 12$.

$$3x = 12 - 4y - 6z$$

$$\text{F. } x = \frac{12 - 4y - 6z}{3}$$

II. $6x + 10y + 9z = 24$

$$6x = 24 - 10y - 9z$$

$$\text{F. } x = \frac{24 - 10y - 9z}{6}$$

Es ist also $\frac{12 - 4y - 6z}{3} = \frac{24 - 10y - 9z}{6}$ (6

$$24 - 8y - 12z = 24 - 10y - 9z$$

$$10y - 8y = 24 - 24 + 12z - 9z$$

$$2y = 3z$$

$$\text{F. } y = \tfrac{3}{2}z.$$

III. $9x + 2y + 6z = 18$

$9x = 18 - 2y - 6z$

F. $x = \frac{18 - 2y - 6z}{9}$

Daher ist auch $\frac{12 - 4y - 6z}{3} = \frac{18 - 2y - 6z}{9}$ (9

$36 - 12y - 18z = 18 - 2y - 6z$

$36 - 18 - 18z + 6z = 12y - 2y$

$10y = 18 - 12z$

F. $y = \frac{18 - 12z}{10}$

Folglich ist $\frac{3}{2}z = \frac{18 - 12z}{10}$ (10

$15z = 18 - 12z$

$15z + 12z = 18$

$27z = 18$

F. $z = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ rthlr.

Oben war $y = \frac{3}{2}z$

F. $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$ thlr.

Und weil $x = \frac{12 - 4y - 6z}{3}$,

so wird $x = \frac{12 - 4 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{2}{3}}{3}$

F. $x = \frac{12 - 4 - 4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ rthlr.

Probe.

I. 3 Schfl. Weizen à $1\frac{1}{3}$ thlr. = 4 thlr.
4 — Roggen à 1 • = 4 •
6 — Gerste à $\frac{2}{3}$ • = 4 • — 12 thlr.

II.

II. 6 Schfl. Weizen à $1\frac{1}{3}$ thlr. = 8 thlr.
10 — Roggen à 1 " = 10 "
9 — Gerste à $\frac{3}{2}$ " = 6 " — 24 thlr.

III. 9 — Weizen à $1\frac{1}{3}$ " = 12 "
2 — Roggen à 1 " = 2 "
6 — Gerste à $\frac{2}{3}$ " = 4 " — 18 thlr.

## 25.

Hätte man allgemein gesagt: Es hat jemand zu drey verschiedenen Mahlen geliefert
für a von Nr. I. b, von Nr. II. c und von Nr. III. d;
für e — — f, — — g — — — h, und
für i — — k, — — l — — — m; wie hoch hat er das einfache Maaß oder die Einheit von jeder Nummer dem Empfänger angerechnet?

so hätte man, wenn diese Aufgabe gehörig wäre aufgelöset worden, eine allgemeine Formel erhalten, durch welche man den vorigen und ähnliche Fälle hätte berechnen können.

Setzt man also den Werth der Einheit von Nr. I = x, von Nr. II = y und von Nr. III = z; so ist

I. $bx + cy + dz = a$
II. $fx + gy + hz = e$
III. $kx + ly + mz = i$.

Also I. $bx + cy + dz = a$

$bx = a - cy - dz$

F. $x = \frac{a - cy - dz}{b}$.

II. $fx + gy + hz = e$

$fx = e - gy - hz$

F. $x = \frac{e - gy - hz}{f}$.

Folglich $\frac{a - cy - dz}{b} = \frac{e - gy - hz}{f}$ (bf

$af - cfy - dfz = be - bgy - bhz$

$bgy - cfy = be - af + dfz - bhz$

F. $y = \frac{be - af + dfz - bhz}{bg - cf,}$

Nun suche man noch einen Werth für x aus der Gleichung III.

$kx + ly + mz = i$

$kx = i - ly - mz$

$x = \frac{i - ly - mz}{k.}$

Oben war $x = \frac{a - cy - dz}{b}$

F. $\frac{i - ly - mz}{k} = \frac{a - cy - dz}{b}$ (bk

$bi - bly - bmz = ak - cky - dkz$

$cky - bly = ak - bi + bmz - dkz$

F. $y = \frac{ak - bi + bmz - dkz}{ck - bl.}$

vorhin war $y = \frac{be - af + dfz - bhz}{bg - cf.}$

Es ist also $\frac{ak - bi + bmz - dkz}{ck - bl} = \frac{be - af + dfz - bhz}{bg - cf.}$

oder $\frac{ak - by + (bm - dk)z}{ck - bl} = \frac{be - af + (df - bh)z}{bg - cf.}$

In dieser Gleichung findet sich nun nur noch eine unbekannte Größe, nemlich z. Um aber ihren Werth zu finden, müßte man die ganze Gleichung ins Product der beyden Nenner multipliciren. Weil man aber bey der großen Anzahl Glieder, die man auf diese Art erhalten würde, sich leicht irren könnte,

so

so thut man besser, wenn man für die bekannten Größen einfachere Zeichen substituirt und dadurch den Calcul abkürzt. Man setze also in den beyden Gleichungen für y.

$ak - bi = \alpha$

$bm - dk = \beta$, folglich $bmz - dkz = \beta z$

$ck - bl = \gamma$

$be - af = \delta$

$df - bh = \varepsilon$, folglich $dfz - bhz = \varepsilon z$.

$bg - cf = \lambda$.

dann wird aus der Gleichung $y = \frac{ak - bi + (bm - dx)z}{ck - bl}$

folgende $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$

und aus der Gleichung $y = \frac{be - af + (df - bh)z}{bg - cf}$

wird die Gleichung $y = \frac{\delta + \varepsilon z}{\lambda}$

Folglich $\frac{\frac{\alpha + \beta z}{\gamma}}{\frac{\delta + \varepsilon z}{\lambda}}$ (γλ

Daher $\alpha\lambda + \beta\lambda z = \gamma\delta + \gamma\varepsilon z$

und $\beta\lambda z - \gamma\varepsilon z = \gamma\delta - \alpha\lambda$

F. $z = \frac{\gamma\delta - \alpha\lambda}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}$

Setzt man nun diesen Werth für z in einer der Gleichungen für y, so bekommt man auch für y einen bestimmten Werth.

Nun war $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$

$z = \frac{\gamma\delta - \alpha\lambda}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}$

Es ist also $y = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta \cdot \frac{\gamma\delta - \alpha\lambda}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}}{\gamma}$

$$z = \frac{\alpha\beta\lambda - \alpha\gamma\varepsilon}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}$$

$$\text{Daher } y = \frac{\alpha\beta\lambda - \alpha\gamma\varepsilon + \beta\gamma\delta - \alpha\beta\lambda}{\beta\gamma\lambda - \gamma\gamma\varepsilon}$$

$$\text{F. } y = \frac{\beta\delta - \alpha\varepsilon}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}.$$

Setzt man endlich diese beyden gefundenen Werthe für y und z in einer der obigen Gleichungen für x, so erhält man auch für x einen bestimmten Werth. Es war aber

$$x = \frac{a - cy - dz}{b}$$

$$z = \frac{\gamma\delta - \alpha\lambda}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}$$

$$y = \frac{\beta\delta - \alpha\varepsilon}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon}$$

$$\text{F. } x = \frac{a}{b} - \frac{c(\beta\delta - \alpha\varepsilon)}{b(\beta\lambda - \gamma\varepsilon)} - \frac{d(\gamma\delta - \alpha\lambda)}{b(\beta\lambda - \gamma\varepsilon)}$$

$$\text{F. } x = \frac{a(\beta\lambda - \gamma\varepsilon) - c(\beta\delta - \alpha\varepsilon) - d(\gamma\delta - \alpha\lambda)}{b(\beta\lambda - \gamma\varepsilon)}.$$

26.

Anwendung. Ein Kaufmann hat für dieselben Preise zu drey verschiedenen Mahlen geliefert:

20 Ct. Kaffee, 16 Ct. Reiß u. 14 Ct. Rosinen für 1658 thl.
16 " — 30 " — 52 " — für 2014 "
64 " — 12 " — 8 " — für 4684 "

Wie hoch hat er dem Empfänger den Centner von jeder Waare angerechnet?

Hier ist a = 1658 thl. b = 20, c = 10 und d = 14.
e = 2014 " f = 16, g = 30 — h = 52.
i = 4684 " k = 64, l = 12 — m = 8.

Fer-

Ferner ist

$\alpha = ak - bi = 1658.64 - 20.4684 = 106112 - 93680 = 12432$
$\beta = bm - dk = 20.8 - 14.64. = 160 - 896 = -736$
$\gamma = ck - bl = 10.64 - 20.12 = 640 - 240 = 400$
$\delta = be - af = 20.2014 - 1658.16 - 40280 - 26528 = 13752.$
$\varepsilon = df - bh = 14.16 - 20.52 = 224 - 1040 = -816$
$\lambda = bg - cf = 20.30 - 10.16 = 600 - 160 = 440.$

$$\text{F. } z = \frac{\gamma\delta - \alpha\lambda}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon} = \frac{400.13752 - 12432.440}{(-736.440) - (400.-816)}$$

$$= \frac{5500800 - 5470080}{-323840 - -326400} = \frac{30720}{2560} =$$

12 thlr.

$$\text{F. } y = \frac{\varepsilon\delta - \alpha\varepsilon}{\beta\lambda - \gamma\varepsilon} = \frac{-736.13752 - 12432.-816}{2560}$$

$$= \frac{-10121472 - -10144512}{2560} = \frac{23040}{2560} =$$

9 thlr.

$$\text{F. } x = \frac{a(\beta\lambda - \gamma\varepsilon) - c(\beta\delta - \alpha\varepsilon) - d(\gamma\delta - \alpha\lambda)}{b(\beta\lambda - \gamma\varepsilon)}$$

$$x = \frac{1658.2560 - 10.23040 - 14.30720}{20.2560}$$

$$x = \frac{4244480 - 230400 - 430080}{51200} = \frac{3584000}{51200} = 70 \text{ thlr.}$$

## Probe.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. | 20 Ct. Kaffee à 70 thlr. | = | 1400 thl. | |
| | 10 • Reiß à 9 • | = | 90 • | = 1658 thl. |
| | 14 • Rosin. à 12 • | = | 168 • | |
| II. | 16 • Kaffee à 70 • | = | 1120 • | |
| | 30 • Reiß à 9 • | = | 270 • | = 2014 • |
| | 52 • Rosin. à 12 • | = | 624 • | |
| III. | 64 • Kaffee à 70 • | = | 4480 • | |
| | 12 • Reiß à 9 • | = | 108 • | = 4684 • |
| | 8 • Resin. à 12 • | = | 96 • | |

27.

17te Aufgabe. Vier unbekannte Größen. Welches sind diejenigen vier Größen, von welchen die Summe der ersten, zweyten und dritten = a; der ersten, zweyten und vierten = b; der ersten, dritten und vierten = c; der zweyten, dritten und vierten = d ist?

Setzt man die erste Größe = v, die zweyte = x, die dritte y und die vierte = z; so soll seyn

I. $v + x + y = a$.
II. $v + x + z = b$.
III. $v + y + z = c$.
IV. $x + y + z = d$.

Man ziehe von der ersten Gleichung die übrigen besonders ab, und bemerke die Reste.

Also I. $v + x + y = a$
II. $v + x + z = b$
$- \quad - \quad - \quad -$

F. $y - z = a - b$

Ferner I. $v + x + y = a$
III. $v + y + z = c$
$- \quad - \quad - \quad -$

F. $x - z = a - c$

Und I. $v + x + y = a$
IV. $x + y + z = d$
$- \quad - \quad - \quad -$

F. $v - z = a - d$.

Nun addire man diese drey gefundenen Reste.

Also $v - z = a - d$
$x - z = a - c$
$y - z = a - b$

F. $v + x + y - 3z = 3a - (b + c + d)$

Nun war $v + x + y = a$

F. $a - 3z = 3a - (b + c + d$
und $a - 3a + b + c + d = 3z$

F. $z = \frac{a + b + c + d - 3a}{3}$

Setzt

Setzt man aber $a + b + c + d = s$.

so ist $z = \frac{s}{3} - a$

Und weil $y - z = a - b$

so ist $y = z + a - b$

$$z = \frac{s}{3} - a$$

F. $y = \frac{s}{3} - b$

Weil ferner $x - z = a - c$

so ist $x = z + a - c$

$$z = \frac{s}{3} - a$$

F. $x = \frac{s}{3} - c$

Und weil endlich $v - z = a - d$

so ist $v = z + a - d$

$$z = \frac{s}{3} - a$$

F. $v = \frac{s}{3} - d$.

Also ist $v = \frac{s}{3} - d$; $x = \frac{s}{3} - c$.

$y = \frac{s}{3} - b$ und $z = \frac{s}{3} - a$.

Anwendung. Ein Gewinn ist unter vier Personen so vertheilt worden, daß der erste, zweyte und dritte zusammen 1500 rthlr.; der erste, zweyte und vierte zusammen 2100 rthlr.; der erste, dritte und vierte zusammen 2400 rthlr. und der zweyte, dritte und vierte zusammen 2700 rthlr. bekommen haben. Wie groß ist eines jeden Theil und wie groß überhaupt die zu theilende Summe gewesen?

Hier

Hier ist a = 1500, b = 2100, c = 2400, d = 2700 und s = a + b + c + d = 8700. Es ist also

des 1sten Th. $\frac{8700}{3}$ — 2700 = 2900 — 2700 = 200thl.
oder v = $\frac{}{3}$

des 2ten Theil $\frac{8700}{3}$ — 2400 = 2900 — 2400 = 500 •
oder x = $\frac{}{3}$

des 3ten Theil $\frac{8700}{3}$ — 2100 = 2900 — 2100 = 800 •
oder y = $\frac{}{3}$

des 4ten Theil $\frac{8700}{3}$ — 1500 = 2900 — 1500 = 1400 •
oder z = $\frac{}{3}$

zu theilende Summe = 2900thl.

Probe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. 200 | I. 200 | I. 200 | II. 500 |
| II. 500 | II. 500 | III. 800 | III. 800 |
| III. 800 | IV. 1400 | IV. 1400 | IV. 1400 |
| 1500 = a. | 2100 = b. | 2400 = c. | 2700 = d. |

## II.

## Die Gleichungen vom zweyten Grade.

### 28.

Wenn die unbekannte Größe, deren Werth bestimmt werden soll, in der zweyten Dignität erscheint, so hat man eine quadratische Gleichung oder eine Gleichung vom zweyten Grade. Nun kann diese unbekannte Größe wieder entweder ganz allein in der zweyten Dignität vorkommen, oder sie kann auch außerdem noch in der ersten Dignität und zwar in einem besondern Gliede erscheinen. Ist das erste, so hat man eine reine im andern Fall aber eine unreine quadratische Gleichung.

### 29.

Auch hier besteht die Hauptsache darin, daß man die jedesmaligen Bedingungen der aufzulösenden Aufgabe durch eine schickliche Bezeichnung in

der

der Fundamentalgleichung richtig auszudrücken suche, und dann die Glieder so ordne, daß die mit der unbekannten Größe auf die eine, die bekannten Glieder aber auf die andere Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen, da es sich dann zeigt, ob man eine reine oder unreine Gleichung aufzulösen habe.

## A.

## Von den reinen quadratischen Gleichungen.

### 30.

Eine reine quadratische Gleichung hat auf der einen Seite des Gleichheitszeichens bloß die unbekannte Größe in der zweyten Dignität, auf der andern Seite aber ein aus der bekannten Größe, welcher jene unter den in der Aufgabe angegebenen Bedingungen gleich ist, bestehendes Glied. Denn obgleich in der Fundamentalgleichung $x^2$ selbst öfters noch mit einem Coefficienten erscheint, überdem auch wohl noch ein aus bekannten Größen bestehendes Glied durch Additions- oder Subtractionszeichen damit verbunden ist, so läßt sich doch der Coefficient durch die Division davon trennen, das bekannte Glied aber mit veränderten Zeichen auf die andere Seite schaffen; und wenn auf der andern Seite des Gleichheitszeichens mehrere bekannte Glieder vorkommen, so lassen sie sich doch alle, wenn anstatt der allgemeinen Zeichen Zahlen gesetzt werden, in ein Glied zusammen ziehen. Denn wenn z. B. die Fundamentalgleichung wäre

$$ax^2 \pm bc = m$$

so wird daraus

$$x^2 \pm \frac{bc}{a} = \frac{m}{a}$$

und daraus

$$x^2 = \frac{m}{a} \pm \frac{bc}{a}.$$

Werden

Werden nun $\frac{m}{a} \pm \frac{bc}{a}$ durch Zahlen ausgedrückt, so fließen sie in eine Größe (sie heiße q) zusammen, die, wenn wirklich x dadurch bestimmt werden soll, positiv seyn muß, ob es gleich auch eine negative Größe werden kann, dann aber ists ein Zeichen, daß sich unter den Bedingungen in der Aufgabe kein Werth für x finden lasse.

31.

Ist man mit dem Calcul so weit gekommen, daß man das unbekannte auf der einen Seite allein, das bekannte aber auf der andern Seite hat, oder wenn

$$x^2 = q,$$

so wird sie vollends aufgelöset, wenn man aus beyden Theilen der Gleichung die Wurzel zieht, weil auch dadurch die Gleichheit nicht aufgehoben wird; denn wenn zwey Größen gleich sind, so sind auch ihre gleichnahmigen Wurzeln gleich, und dann sieht eine solche aufgelöfete Gleichung so aus:

$$x = \pm \sqrt{q}.$$

Denn obgleich die bekannte Größe selbst, woraus die Wurzel gezogen werden soll, nur positiv seyn kann, weil die Wurzel aus einer negativen Größe unmöglich ist §. 30, so kann doch die Wurzel aus solcher positiven Größe sowohl negativ als positiv seyn, weil eine negative Wurzel eben so wohl ein positives Quadrat giebt, als eine positive Wurzel. Aus den jedesmaligen Bedingungen der Aufgabe läßt sich dann leicht bestimmen, welcher von beyden Werthen, der positive oder negative, statt habe.

32.

Ist nun q ein vollständiges Quadrat, so läßt sich auch die Wurzel genau ausziehen, und dann erhält

erhält man für x einen ganz bestimmten Werth; ist dies aber nicht, so sucht man doch die Wurzel so genau, als es die Umstände erfordern, durch Näherung.

Wollte man aber die Gleichung durchs Ausziehen der Wurzel nicht auflösen, so kann man sich anstatt dessen auch der logarithmischen Rechnung bedienen, denn wenn z. B.

$$x^2 = m$$

so ist

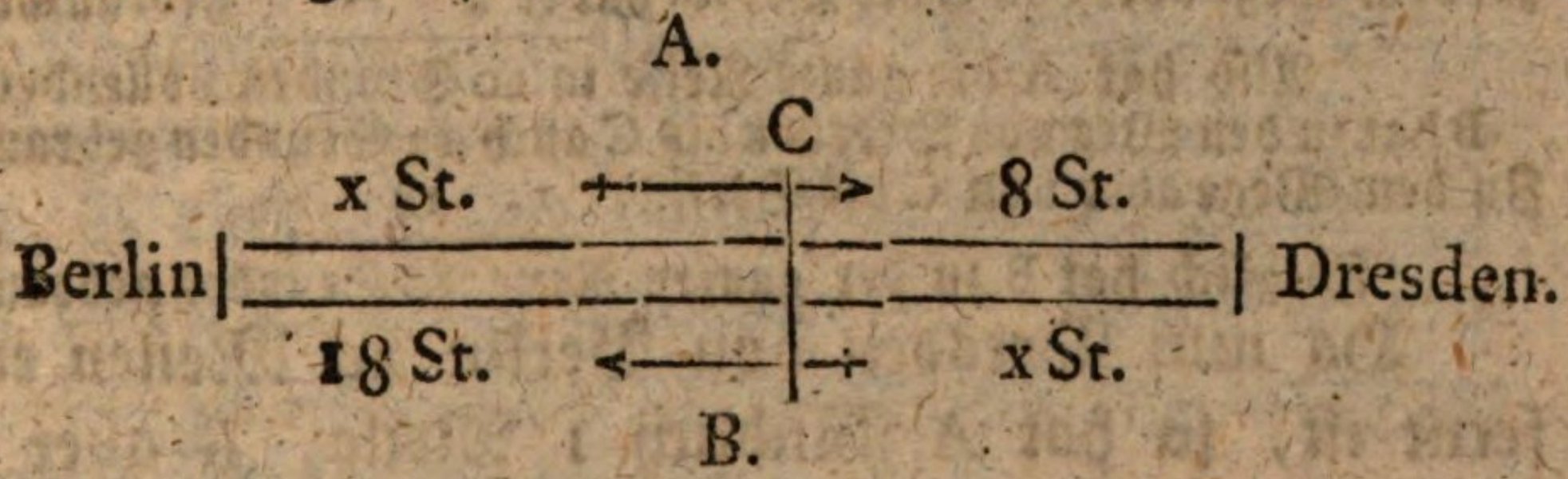
$$2 \log. x = \log. m.$$

$$\text{F. } \log. x = \frac{\log. m}{2}.$$

33.

1te Aufgabe. A reiset von Berlin nach Dresden und trifft unter Weges B an, der zu eben derselben Zeit von Dresden abgereiset ist und nach Berlin will. 8 Stunden nach dem Zusammentreffen kommt A in Dresden an, B aber braucht noch 18 Stunden, ehe er in Berlin ankommt. Wie viel Meilen hat jeder stündlich gemacht.

Man setze, jeder sey, ehe sie einander begegnet, x Stunden gereiset.




A hat also den Weg von C nach Dresden in 8 Stunden zurückgelegt, zu welchem B x Stunden gebraucht hatte; und

B hat zu dem Wege von C nach Berlin 18 Stunden gebraucht, den A in x Stunden zurückgelegt hatte.

Man

Man kann also schließen:

Wie die 8 Stunden, die A gebraucht hat von C nach Dresden

zu den x Stunden, die B zu demselben Weg gebraucht hat;

so die x Stunden, die A gebraucht hat von Berlin nach C

zur vierten Proportionalzahl, welche denn den 18 Stunden gleich seyn muß, die B zu diesem Weg von C nach Berlin gebraucht hat. Dies giebt folgende Proportion

$$8 : x = x : \frac{x^2}{8}.$$

Es ist aber nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\frac{x^2}{8} = 18.$$

daher $x^2 = 144$

F. $x = \pm\sqrt{144} = \pm 12.$

Aus den in der Aufgabe angegebenen Bedingungen sieht man, daß nur der positive Werth statt finden könne.

A hat also den Weg von Berlin bis C in 12 Stunden zurückgelegt
Zu dem Wege aber von C bis Dresd. hat er 8 — gebraucht

Also hat A die ganze Reise in 20 Stunden vollendet.

B hat zu den Weg von Dresden bis C auch 12 Stunden gebraucht
Zu dem Wege aber von C bis Berlin : 18 —

Folglich hat B zu der ganzen Reise 30 Stunden gebraucht

Da nun Dresden von Berlin 20 Meilen entfernt ist, so hat A stündlich 1 Meile, B aber in 3 Stunden 2 Meilen zurückgelegt.

34.

Hätte man allgemein die Zeit, die A gebraucht hat, den Weg des B zurückzulegen = a, die Zeit aber, die B gebraucht hat, um den schon zurückgelegten

legten Weg des A zu machen = b gesetzt, so hätte man $x = \pm\sqrt{ab}$ gefunden.

Addirt man dann zur $\sqrt{ab}$ die Zeit, die A noch brauchte, nachdem er B begegnet war, so bekommt man mit der Summe die ganze Zeit, die A zu der Reise gebraucht hat.

Eben so findet man die ganze Zeit, die B zu der Reise gebraucht hat, wenn man zur $\sqrt{ab}$ noch die Zeit thut, die B noch zu seiner Reise brauchte, nachdem er A begegnet hatte.

Will man dann ihre Geschwindigkeiten mit einander vergleichen, so dividire man die ganze Entfernung durch die Zeit, die jeder gebraucht hat, so erfährt man, wie viel Meilen jeder in einerley Zeit zurückgelegt hat; denn die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Räume dividirt durch die Zeiten, und da im gegenwärtigen Fall der Raum immer derselbe ist, so verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten.

Ein anderes Beyspiel. A reiset von Berlin über Danzig nach Königsberg; B denselben Weg von Königsberg nach Berlin. Nachdem sie einander begegnet, kommt A 8 Tage darauf in Königsberg, B aber $4\frac{1}{2}$ Tag darauf in Berlin an — den Tag zu 10 Stunden gerechnet —. Wie viel Tage hat jeder zu dieser Reise gebraucht und wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

Weil hier a = 8 und b = $4\frac{1}{2}$, so ist

$x = \pm\sqrt{8 \cdot 4\frac{1}{2}} = \pm 36 = +6.$

Folgl. hat A gebr. $8+6 = 14$ Tage à 10 St = 140 St.

B — $4\frac{1}{2}+6 = 10\frac{1}{2}$ — — = 105 —

Da nun Königsberg von Berlin $84\frac{1}{2}$ Meile entfernt ist, so ist die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B $= \frac{84\frac{1}{2}}{140} : \frac{84\frac{1}{2}}{105}$

$= 105 : 140$

$= 3 : 4$

35.

2te Aufgabe. Die Differenz zwischen dem Product aus dem mten in den nten Theil einer Größe und zwischen der Größe p ist $= a$; es wird gefragt was das für eine Größe sey?

Gesetzt die Größe sey $= x$

so ist ihr mter Theil $= \frac{x}{m}$ und der nte Theil $= \frac{x}{n}$.

und das Product aus beyden Theilen $= \frac{x}{m} \cdot \frac{x}{n} = \frac{x^2}{mn}$.

Dieses Product nun weniger p soll gleich seyn a;

man hat also $\frac{x^2}{mn} - p = a$

$(mn$

$x^2 - mnp = amn$

daher $x^2 = amn + mnp$

oder $x^2 = (a + p)\,mn.$

$\mathfrak{F}.\ x = \pm\sqrt{(a+p)mn}.$

Probe.

$\frac{\sqrt{(a+p)\,mn}}{m} \cdot \frac{\sqrt{(a+p)\,mn}}{n} - p = a$

di. i. $\frac{(a+p)\,mn}{mn} - p = a$, d. i. $a + p - p = a$.

Es sey z. B. $a = 20$, $m = 2$, $n = 3$ und $p = 4$.

so ist $x = \pm\sqrt{(20+4)2.3} \pm \sqrt{24 . 6} = \pm\sqrt{144}$

$= \pm 12.$

Probe.

$12^2 . 12^2 - 4 = 6 . 4 - 4 = 24 - 4 = 20.$

und $-12^2 . -12^2 - 4 = -6 . -4 - 4 = 24 - 4 = 20.$

36.

3te Aufgabe. Aus der gegebenen Summe zweyer Größen $= a$ und der Summe ihrer Quadrate $= b$, die Größen selbst zu bestimmen.

Wäre die Differenz der beyden Größen eben so wohl als ihre Summe gegeben, so ließen sich die Größen leicht aus § 18. bestimmen. Man muß daher erst die Differenz der beyden Größen suchen. Setzt man nun ihre Differenz $= y$,

so ist die größre Größe $= \frac{a + y}{2}$

die kleinere Größe $= \frac{a - y}{2}$ } §. 18.

Folglich Quadrat der größern Größe $= \frac{a^2 + 2ay + y^2}{4}$

und das Quadrat der kleinern Größe $= \frac{a^2 - 2ay + y^2}{4}$

Folglich Summe beyder Quadrate $= \frac{2a^2 + 2y^2}{4}$

Es soll aber nach den Bedingungen der Aufgabe diese Summe $= b$ seyn; man hat daher

$$\frac{2a^2 + 2y^2}{4} = b$$

$$2a^2 + 2y^2 = 4b \quad (4$$

und $$2y^2 = 4b - 2a^2$$

$$y^2 = 2b - a^2$$

F. $y = \pm\sqrt{2b - a^2}$.

Folglich die größre Größe oder $\frac{a - y}{2} = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2}$

und die kleinere Größe oder $\frac{a - y}{2} = \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}$

Es sey z. B. die Summe der beyden Zahlen oder $a = 12$, und die Summe ihrer Quadrate oder $b = 90$; so ist

die gröss. $\mathfrak{Z}. = \frac{12 + \sqrt{2.90 - 12^2}}{2} = \frac{12 + \sqrt{180 - 144}}{2}$

$= \frac{12 + \sqrt{36}}{2} = \frac{12 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9.$

die klein. $\mathfrak{Z}. = \frac{12 - \sqrt{2.90 - 12^2}}{2} = \frac{12 - 6}{2} = 3.$

Und wirklich ist auch $9 + 3 = 12$ und $9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90.$

37.

4te Aufgabe. Zwey unbekannte Größen. Zwey Größen zu finden, die so beschaffen sind, daß die Summe ihrer Quadrate $= a$ und die Differenz ihrer Quadrate $= b$ ist.

Es sey die größre Größe $= x$, die kleinere $= y$; so ist

I. $x^2 + y^2 = a$

$x^2 = a - y^2$

F. $x = \pm\sqrt{a - y^2}.$

II. $x^2 - y^2 = b.$

Weil aber $x^2 = a - y^2$

so ist $a - y^2 - y^2 = b$

und $2y^2 = a - b$

$y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)$

F. $y = \pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)}$

War nun $x = \sqrt{a - y^2}$

und ist $y^2 = \frac{a-b}{2}$

so ist $x = \sqrt{\left(a - \frac{a-b}{2}\right)}$

oder $x = \sqrt{\left(\frac{2a - a + b}{2}\right)}$

F. $x = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

Es sey $a = 1801$ und $b = 649$

so ist die gröss. Z. od. $x = \sqrt{\left(\frac{1801 + 649}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2450}{2}\right)} = 35$.

u. die kleinere Z. od. $x = \sqrt{\left(\frac{1801 - 649}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1152}{4}\right)} = 24$.

Probe.

$35^2 + 24^2 = 1225 + 576 = 1801$.
$35^2 - 24^2 = 1225 - 576 = 649$.

38.

5te Aufgabe. Drey unbekannte Grössen. Welches sind diejenigen drey Grössen, die so beschaffen sind, daß das Product aus der ersten in die Summe der zweyten und dritten $= a$, das Product aus der zweyten in die Summe der ersten und dritten $= b$, das Product aus der dritten in die Summe der ersten und zweyten $= c$ ist?

Setzt man die erste Grösse $= x$, die zweyte $= y$ und die dritte $= z$, so soll nach dem Inhalt der Aufgabe seyn

I. $x(y + z) = a$

oder $xy + xz = a$

II. $y(x + z) = b$

oder $xy + yz = b$.

III. $z(x + y) = c$

oder $xz + yz = c$

Man ziehe von I. $xy + xz = a$

ab II. $xy + yz = b$

so ist $xz - yz = a - b$.

Hiezu addire man III. $xz + yz = c$

so ist $2xz = a - b + c$

F. IV. $z = \frac{a - b + c}{2x}$

Ferner ziehe man von I. $xy + xz = a$
ab III. $xz + yz = c$

so ist $xy - yz = a - c$
und addire dazu II. $xy + yz = b$

so ist $2xy = a - c + b$

F. V. $y = \frac{a - c + b}{2x}$

Noch ziehe man von III. $xz + yz = c$
ab I. $xy + xz = a$

so ist $yz - xy = c - a$
und addire dazu II. $xy + yz = b$

so ist $2yz = c - a + b$

F. VI. $y = \frac{c - a + b}{2z}$

vorhin war $2xy = a - c + b$

Es ist also auch $\frac{2x(c - a + b)}{2z} = a - c + b$

und $2x(c - a + b) = 2z(a - c + b)$

und $x(c - a + b) = z(a - c + b)$

$z = \frac{a - b + c}{2x}$ (IV)

daher ist $x(c - a + b) = \frac{(a - b + c)(a - c + b)}{2x}$

und $2x^2(c - a + b) = (a - b + c)(a - c + b)$

und $x^2 = \frac{(a - b + c)(a - c + b)}{2(c - a + b)}$

F. $x = \pm \sqrt{\left(\frac{(a - b + c)(a - c + b)}{a(c - a + b)}\right)}$

Weil

Weil nun V. $y = \frac{a-c+b}{2x}$

daher $y^2 = \frac{(a-c+b)(a-c+b)}{4x^2}$

$x^2 = \frac{(a-b+c)(a-c+b)}{2(c-a+b)}$

Es ist also $y^2 = \frac{2(a-b+c)(a-c+b)(c-a+b)}{4(a-b+c)(a-c+b)}$

oder $y^2 = \frac{(a-c+b)(c-a+b)}{2(a-b+c)}$

F. $y = \pm\sqrt{\left(\frac{(a-c+b)(c-a+b)}{2(a-b+c)}\right)}$

Ferner war IV. $z = \frac{a-b+c}{2x}$

daher $z^2 = \frac{(a-b+c)(a-b+c)}{4x^2}$

$x^2 = \frac{(a-b+c)(a-c+b)}{2(c-a+b)}$

daher $z^2 = \frac{2(a-b+c)(a-b+c)(c-a+b)}{4(a-b+c)(a-c+b)}$

oder $z^2 = \frac{(a-b+c)(c-a+b)}{2(a-c+b)}$

F. $z = \pm\sqrt{\left(\frac{(a-b+c)(c-a+b)}{2(a-c+b}\right)}$

Anwendung. Drey Personen haben einen gewissen Gewinn so getheilt, daß das Product aus dem ersten Theil in die Summe des zweyten und dritten gleich war 200000, das Product aus dem zweyten Theil in die Summe des ersten und dritten = 130000, und das Product aus dem dritten Theil in die Summe des ersten und zweyten 250000. Wie groß ist jeder Theil und die ganze zu theilende Summe gewesen?

Hier ist $a = 200000$, $b = 130000$ und $c = 250000$.

$a - b + c = 200000 - 130000 + 250000 = 320000.$

$a - c + b = 200000 - 250000 + 130000 = 80000.$

$c - a + b = 250000 - 200000 + 130000 = 180000.$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{320000 \cdot 80000}{2 \cdot 180000}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{160000 \cdot 40000}{90000}\right)} = \pm\frac{400 \cdot 200}{300}$$

$$= \pm 266\tfrac{2}{3}\text{thl}$$

$$y = \pm\sqrt{\left(\frac{80000 \cdot 180000}{2 \cdot 320000}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{40000 \cdot 90000}{160000}\right)} = \pm\frac{200 \cdot 300}{400}$$

$$= \pm 150\text{thl.}$$

$$z = \pm\sqrt{\left(\frac{320000 \cdot 180000}{2 \cdot 80000}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{160000 \cdot 90000}{40000}\right)} = \pm\frac{400 \cdot 300}{200}$$

$$= \pm 600\text{thl.}$$

## Probe.

$266\frac{2}{3}\,(150 + 600) = 266\frac{2}{3} \cdot 750 = 200000$

$150\,(266\frac{2}{3} + 600) = 150 \cdot 866\frac{2}{3} = 130000$

$600\,(266\frac{2}{3} + 150) = 600 \cdot 416\frac{2}{3} = 250000.$

## B.

## Unreine quadratische Gleichungen.

### 39.

Unreine oder zusammengesetzte quadratische Gleichungen sind solche, in welchen außer $x^2$ dasselbe $x$ auch noch in der ersten Dignität vorkommt. Man kann sich daher alle solche Gleichungen unter folgender allgemeinen Form vorstellen:

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

oder $x^2 \pm px = \pm q.$

### 40.

Man erhält nun zwar die Fundamentalgleichung nicht allemahl in dieser einfachen Form, daß nemlich die eine Hälfte aus zwey Gliedern, die andre aber nur aus einem Gliede bestehen sollte. Es bestehe aber die Fundamentalgleichung aus noch so

vielen

vielen Gliedern, so lassen sich diese doch dergestalt zusammenziehen, daß man überhaupt nur noch drey Glieder auf beyden Seiten behält. Denn wenn man z. B. folgende Fundamentalgleichung aus den Bedingungen einer Aufgabe erhalten hätte:

$2ax^2 + 4bx^2 \pm 4abx - 3acx = \pm 2a^2 - 4ab \pm 6abc.$

so ist ja $2ax^2 + 4bx^2 = (2a + 4b)x^2.$

ferner $4abx - 3acx = (4ab - 3ac)x.$

und $2a^2 - 4ab + 6abc = (a - 2b + 3bc)2a.$

und dann verwandelt sich jene Gleichung in folgende:

$(2a + 4b)x^2 \pm (4ab - 3ac)x = \pm 2a(a - 2b + 3bc.$

Und dividirt man diese Gleichung durch den Coefficienten von $x^2$, so erhält man

$$x^2 \pm \frac{(4ab - 3ac)x}{2a + 4b} = \pm \frac{2a(a - 2b + 3bc)}{2a + 4b.}$$

oder, wenn man sie auf o reducirt, folgende:

$$x^2 \pm \frac{(4ab - 3ac)x}{2a + 4b} \pm \frac{2a(a - 2b + 3bc)}{2a + 4b} = o.$$

Daß aber der Coefficient von x, nemlich $\frac{4ab - 3ac}{2a + 4b}$, desgleichen die verschiedenen Größen des dritten Gliedes, nemlich $\frac{2a(a - 2b + 3bc)}{2a + 4b}$, wenn man diese allgemeinen Zeichen durch Zahlen ausdrückt, in eine Größe zusammen fließen, ist leicht begreiflich, und dann wird jener Coefficient in der allgemeinen Formel durch $\pm p$, das dritte Glied aber durch $\pm q$ angedeutet.

41.

Was nun die Bezeichung dieser Glieder in der allgemeinen Formel §. 39. betrifft, so muß man, wenn $x^2$ als eine negative Größe erscheinen sollte, die Fundamentalgleichung so verändern, daß $x^2$ allemahl positiv wird, welches durchs Versetzen der

Glieder von der einen Seite auf die andre allemahl möglich zu machen ist. Die beyden andern Glieder aber können sowohl negativ als positiv seyn.

42.

Nimmt man nun die allgemeine Formel

$$x^2 \pm px = \pm q,$$

so sieht man bald, daß, wenn man diese Gleichung auflösen wollte, man die Wurzel würde ausziehen müssen. Wäre nun $x^2 \pm px$, ein vollständiges Quadrat, so würde sich auch die Wurzel leicht finden lassen. Man sieht aber bald, daß die Wurzel nothwendig aus mehr, als aus einem Theile bestehen müsse, weil schon $\sqrt{x^2} = x$. Wir haben aber $x^2 \pm px$. Sie muß also nothwendig aus zwey Theilen bestehen, und gleichwohl besteht umgekehrt wieder das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel allemahl aus drey Gliedern, wir haben aber deren nur zwey. Vielleicht aber läßt sich aus den zwey vorhandenen Gliedern das fehlende dritte Glied ergänzen.

43.

Betrachtet man das Quadrat $a^2 \pm 2ab + b^2$ des Binomiums $a \pm b$, so sieht man: das erste Glied des Quadrats besteht aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel; das zweyte Glied des Quadrats besteht aus dem Product des ersten Theils der Wurzel in dem doppelten zweyten Theil, und das dritte Glied des Quadrats besteht aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel. Man kann also das dritte Glied oder $b^2$ erhalten, wenn man das, was im zweyten Gliede mit dem ersten Theil der Wurzel durch die Multiplication verbunden ist, halbirt,

also $\frac{2b}{2} = b$, und diese Hälfte nemlich b ins Quadrat erhebt $= b^2$.

Vergleicht man $x^2 \pm px$ mit $a^2 \pm 2ba$, so muß man ebenfalls aus dem mit x im zweyten Gliede verbundenen Factor p das fehlende dritte Glied erhalten können, wie man $b^2$ aus 2b erhalten hat. Man darf nur ebenfalls, wie dort, den halben Factor $\pm p = \pm \frac{p}{2}$ ins Quadrat erheben; es ist aber das Quadrat von $\pm \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$, verbindet man nun dies mit den beyden vorhandenen Gliedern $x^2 \pm px$ durch das Zeichen plus, so muß $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2$ ebenfalls ein vollständiges Quadrat seyn, weil man das dritte Glied $\frac{1}{4}p^2$ auf eben die Art aus dem Coefficienten des ersten Theils der Wurzel im zweyten Gliede formirt hat, wie $b^2$ aus 2b entstanden ist.

44.

Es wird aber dies auf die angezeigte Art erhaltene dritte Glied allemahl positiv seyn, wenn gleich der Coefficient des zweyten Gliedes, woraus es entstanden ist, negativ ist. Es verwandelt sich dann die erste Hälfte der Gleichung

$$x^2 \pm px$$

in folgende $x^2 \pm px + \frac{p^2}{4}$.

Weil nun aber dadurch, daß auf der einen Seite $\frac{p^2}{4}$ hinzugethan worden ist, die vorige Gleichheit aufgehoben wird, denn da vorhin

$$x^2 \pm px = \pm q$$

so ist nun offenbar $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 > \pm q$; gleichwohl aber beyde Sätze gleich seyn sollen, so muß die Größe, um welche die eine Hälfte vermehrt

worden

worden ist, auch zur andern Hälfte der Gleichung hinzugethan werden, und dann wird aus der Gleichung

$$x^2 \pm px = \pm q$$

folgende: $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 \pm q$.

45.

Wollte man nun diese Gleichung vollends auflösen, so würde man noch auf beyden Seiten die Wurzel ausziehen müssen; und da nunmehr $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2$ ein vollständiges Quadrat ist, so ists auch leicht die Wurzel auszuziehen. Sie besteht nemlich aus zwey Theilen, der erste ist die Wurzel x aus dem ersten Gliede $x^2$ des Quadrats; den zweyten Theil aber erhält man, wenn man den Coefficienten der unbekannten Größe in der ersten Dignität oder den Coefficienten $\pm p$ von x halbirt, also $\pm \frac{1}{2}p$, und diesen halben Coefficienten durch dasjenige Zeichen mit dem ersten Theil der Wurzel verbindet, welches der ganze Coefficient hatte. Es ist also

$$\sqrt{x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2} = x \pm \frac{1}{2}p.$$

Anmerkung.

Man würde zwar den zweyten Theil $\frac{1}{2}p$ der Wurzel auch erhalten, wenn man die Wurzel aus dem dritten Gliede $\frac{1}{4}p^2$ nehmen wollte, denn $\frac{1}{2}p$ ist wirklich $= \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$; auch ist $-\frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$. Da man sich aber in Ansehung des Zeichens, welches der zweyte Theil der Wurzel oder $\frac{1}{2}p$ erhalten soll, doch an das zweyte Glied des Quadrats halten muß, so thut man besser, wenn man allemahl den halben Coefficienten des zweyten Gliedes des Quadrats nimmt. Ist alsdann dies zweyte Glied positiv, so wird auch der zweyte Theil der Wurzel positiv werden,

ist

ist es aber negativ, so wird auch dieser Theil der Wurzel, als die Hälfte einer negativen Größe, negativ seyn.

46.

Auf der andern Seite muß nun gleichfalls die Wurzel ausgezogen werden, und da kann es drey Fälle geben.

1. Entweder ist $\frac{1}{4}p^2 \pm q$, wenn es in Zahlen ausgedruckt zusammen gezogen wird, auch ein vollständiges Quadrat, dann erhält man für x, oder vielmehr zunächst für $x \pm \frac{1}{2}p$, einen ganz bestimmten Werth.
2. Oder $\frac{1}{4}p^2 \pm q$ ist kein vollständiges Quadrat, dann begnügt man sich die Wurzel durch die Approximation so genau, als es die Umstände erfordern, zu suchen, man darf aber dann auch keinen ganz genauen Werth für x erwarten.
3. Oder q ist, wenn es eine negative Größe ist, größer als $\frac{1}{4}p^2$. Weil aber dann ganz natürlich die Differenz zwischen $\frac{1}{4}p^2$ und $-q$ eine negative Größe ist, so läßt sich auch die Wurzel nicht ausziehen, und dann ists ein Zeichen, daß die Aufgabe unter den angegebennn Bedingungen nicht statt finden könne.

47.

Hat man nun aus beyden Theilen der Gleichung die Wurzel gezogen, so erhält man folgende Gleichung:

$$x \pm \tfrac{1}{2}p = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q}.$$

Um nun bloß den gesuchten Werth für x zu bekommen, muß man noch $\pm \frac{1}{2}p$ mit veränderten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung schaffen, und dann wird

aus

aus der Gleichung $x \pm \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 \pm q}$.
folgende $x = \pm\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 \pm)q}$.

Und nun ist die Aufgabe völlig aufgelöset. Man erhält aber für x allemahl einen doppelten Werth, nemlich einen positiven und einen negativen. Die in der Aufgabe angegebenen Bedingungen müssen dann entscheiden, welcher von beyden Werthen statt finden könne.

## 48.

Das ganze Verfahren, wodurch eine unreine quadratische Gleichung aufgelöset wird, besteht also kürzlich nochmals in folgenden.

1. Man formirt aus den in der Aufgabe angegebenen Bedingungen und Vorschriften die Fundamentalgleichung.
2. Man ordnet die Glieder so, daß diejenigen mit der unbekannten Größe auf die eine, die bekannten Glieder aber auf die andere Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen und zwar so, daß das oder die Glieder mit der unbekannten Größe in der zweyten Dignität voran stehen, und die mit derselben unbekannten Größe in der ersten Dignität folgen.
3. Man zieht die Glieder so zusammen, daß man überhaupt nur drey Glieder erhält, nemlich eins mit der unbekannten Größe in der zweyten, eins mit derselben Größe in der ersten Dignität und eins aus lauter bekannten Größen.
4. Ist die unbekannte Größe in der zweyten Dignität mit einem Coefficienten verbunden, so macht man ihn nunmehr davon frey.

5. Man

5. Man ergänzt das fehlende dritte Glied auf der Seite der unbekannten Größe, indem man den halben Coefficienten der unbekannten Größe in der ersten Dignität quadrirt und das Quadrat auf beyden Seiten der Gleichung hinzu thut.

Anmerkung. Sollte bey x kein Coefficient ausgedruckt seyn, so ist 1 dessen Coefficient, nnd dann addirt man auf beyden Seiten allemahl $\frac{1}{4}$.

6. Nun wird auf beyden Seiten die Wurzel ausgezogen.

7. Endlich bringt man, um x allein zu bekommen, den zweyten Theil der gefundenen Wurzel von der Seite der unbekannten Größe mit veränderten Zeichen auf die andere Seite der bekannten Größen.

49.

1te Aufgabe. Was ists für eine Größe, deren Quadrat gleich ist der Summe aus der doppelten Zahl und aus a?

Es sey die Zahl $= x$,

so soll seyn $x^2 = 2x + a$ Man ordne die Glieder.

$x^2 - 2x = a$ Man ergänze das fehlende Glied. Der halbe Coefficient ist $= 1$, dessen Quadrat $= 1$ auf beyden Seiten addirt wird.

$x^2 - 2x + 1 = a + 1$ Man ziehe die Wurz. aus.

$x - 1 = \pm\sqrt{a+1}$ Man bringe $-1$ auf die andere Seite.

F. $x = 1 \pm \sqrt{a+1}$.

Besonderes Beyspiel. Was ist das für eine Zahl, deren Quadrat so groß ist als die doppelte Zahl $+24$?

$x = 1 \pm \sqrt{24+1} = 1 \pm \sqrt{25} = 1 \pm 5 = 6$ oder $-4$.

Probe.

Probe.

$$6^2 = 2.6 + 24 = 12 + 24 = 36$$
$$-4^2 = 2.-4 + 24 = -8 + 24 = 16.$$

50.

2te Aufgabe. Was sind das für zwey Größen, deren Unterschied gleich dem nten Theil der kleinern, ihr Product aber gleich der größern nmahl genommen plus a?

Es sey die kleinere Größe $= x$

so ist die größere Größe $= x + \frac{x}{n}$

Folglich ihr Product $= x^2 + \frac{x^2}{n}$

Dies Product aber soll gleich seyn der nfachen größern Größe + a.

Man hat also: $x^2 + \frac{x^2}{n} = n\,(x + \frac{x}{n}) + a$

$$\frac{nx^2 + x^2}{n} = nx + x + a$$

$$nx^2 + x^2 = n^2x + nx + an \quad (n$$

$$(n+1)x^2 - (n+1)nx = an$$

$$x^2 - \frac{(n+1)\,nx}{n+1} = \frac{an}{n+1}$$

$$x^2 - nx = \frac{an}{n+1}$$

$$x^2 - nx + \frac{n^2}{4} = \frac{an}{n+1} + \frac{n^2}{4}$$

$$x^2 - nx + \frac{n^2}{4} = \frac{4an + n^2(n+1)}{4(n+1)}$$

$$x - \frac{n}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{4an + n^2(n+1)}{4(n+1)}\right)}$$

$$x = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4an + n^2(n+1)}{4(n+1)}\right)}$$

Beson-

Besonderes Beyspiel. Was sind das für zwey Zahlen, deren Unterschied gleich dem vierten Theil der kleinern, ihr Product aber gleich der Summe aus 120 und der größern viermahl genommen?

Hier ist $n = 4$ und $a = 120$.

Folgl. $x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 120 \cdot 4 + 4^2 \cdot (4+1)}{4(4+1)}} = 2 + \sqrt{\frac{1920+80}{20}}$

$= 2 \pm \sqrt{\frac{2000}{20}} = 2 \pm 10 = \begin{cases} 12 \\ -8 \end{cases}$

Ist nun die kleinere Zahl $= 12$
so ist die größre $= 12 + \frac{12}{4} = 15$

und dann ist $180 = 4 \cdot 15 + 120$.

Ist aber die kleinere Zahl $= -8$
so ist die größre $= -8 + \frac{-8}{4} = -10$

und dann ist $80 = 4 \cdot -10 + 120$.

51.

3te Aufgabe. Aus der gegebenen Summe $= a$ dreyer in geometrischer Proportion stehender Größen und der Summe ihrer Quadrate $= b^2$ die Größen selbst zu bestimmen.

Wenn die drey Größen $x$, $y$ und $z$, so soll seyn

I. $x : y = y : z$

daher $y^2 = xz$.

II. $x + y + z = a$

daher $z = a - x - y$

F. $z^2 = a^2 - 2ax - 2ay + x^2 + 2xy + y^2$.

III. $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

$x^2 = b^2 - y^2 - z^2$

$z^2 = a^2 - 2ax - 2ay + x^2 + 2xy + y^2$.

F. $x^2 = b^2 - y^2 - a^2 + 2ax + 2ay - x^2 - 2xy - y^2$.

$2x^2 - 2ax + 2xy = b^2 - a^2 - 2y^2 + 2ay$

$$x^2 - ax + xy = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2 - y^2 + ay$$

$$x^2 - (a+y)x + \frac{a^2-2ay+y^2}{4} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - y^2 + ay + \frac{a^2-2ay+y^2}{4}$$

$$\text{F. } x - \frac{a+y}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{2b^2-2a^2-4y^2+4ay+a^2-2ay+y^2}{4}\right)}$$

$$\text{F. } x = \frac{a-y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2b^2-a^2-3y^2+2ay}{4}\right)}$$

$$\text{F. } x = \frac{a-y}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{3y^2}{4} + \tfrac{1}{2}ay}.$$

Oben I. war $y^2 = xz$

$$z = a - x - y$$

$$\text{F. } y^2 = ax - x^2 - xy$$

$$\text{F. } x^2 - (a+y)x = -y^2$$

und $x^2 - (a+y)x + \frac{a^2-2ay+y^2}{4} = \frac{a^2-2ay+y^2}{4} - y^2$

und $x - \frac{a+y}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ay}{2} - \frac{3y^2}{4}\right)}$

$$\text{F. } x = \frac{a-y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ay}{2} - \frac{3y^2}{4}\right)}$$

$$\text{F. } \frac{a-y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4} + \frac{ay}{2}\right)} = \frac{a-y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ay}{2} - \frac{3y^2}{4}\right)}.$$

$$\text{F. } \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{3y^2}{4} + \frac{ay}{2}\right)} = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{3}{4}y^2\right)}$$

$$\text{F. } \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4} + \frac{ay}{2} = \frac{a^2}{4} - \frac{ay}{2} - \frac{3y^2}{4}$$

$$\text{F. } \frac{ay}{2} + \frac{ay}{2} = -\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{3y^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}$$

$$\text{F. } ay = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$$

$$\text{F. } y = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Diesen

Diesen für y gefundenen bestimmten Werth substituire man nun an seinem Ort in der Gleichung für x.

$$x = \frac{a}{2} - \frac{y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ay}{2} - \frac{3y^2}{4}\right)}$$

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \quad \text{Folgl. } y^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4a^2}$$

$$\text{F. } \frac{y}{2} = \frac{a^2 - b^2}{4a}$$

$$\text{F. } x = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{3a^2}{16} + \frac{3b^2}{8} - \frac{3b^4}{16a^2}}$$

$$\text{F. } x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \sqrt{\frac{5}{8}b^2 - \frac{3}{16}a^2 - \frac{3b^4}{16a^2}}$$

$$\text{F. } x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \sqrt{\frac{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}{16a^2}}$$

$$\text{F. } x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

Endlich findet man z, wenn man in der Gleichung für z den gefundenen Werth für x und y substituirt. Es war aber

II. $z = a - x - y.$

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

daher $z = a - x - \frac{a^2 - b^2}{2a}$

oder $z = a - x - \frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}$

also $z = \frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a} - x$

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

$$\text{F. } z = \frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a} - \frac{a^2 - b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

$$\text{F. } z = \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

$$\text{F. } z = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}.$$

x und z haben also denselben doppelten Werth und zwar ist x das erste und z das letzte Glied einer continuirlichen geometrischen Proportion. Da nun unmöglich beyde Glieder einander gleich seyn können, so muß der letzte Terminus der Proportion den positiven Werth der Wurzel bekommen, wenn der erste den negativen hat, und umgekehrt.

Es sey z. B. die Summe der drey Glieder oder $a = 7$, und die Summe ihrer Quadrate oder $b^2 = 21$.

Ist $a = 7$, so ist $a^2 = 49$ und $a^4 = 2401$.
und ist $b^2 = 21$, so ist $b^4 = 441$.

Es ist also $y = \frac{a^2 - b^2}{2a} = \frac{49 - 21}{2 \cdot 7} = \frac{28}{14} = 2$.

und $x = \frac{49 \dagger 21}{4 \cdot 7} \pm \frac{\sqrt{10 \cdot 49 \cdot 21 - 3 \cdot 2401 - 3 \cdot 441}}{4 \cdot 7}$

$x = \frac{70}{28} \pm \frac{\sqrt{10290 - 7203 - 1323}}{28}$

$x = \frac{70}{28} \pm \frac{\sqrt{1764}}{28}$

$x = \frac{70}{28} \pm \frac{42}{28} = \begin{cases} 4 \\ 1. \end{cases}$

und $z = \frac{70}{28} \mp \frac{42}{28} = \begin{cases} 1. \\ 4. \end{cases}$ $x : y = y : z$

Also ist die Proportion entweder $4 : 2 = 2 : 1$
oder $1 : 2 = 2 : 4$

Ferner ist $4 \dagger 2 \dagger 1 = 7 = a$
und $4^2 \dagger 2^2 \dagger 1^2 = 21 = b^2$.

## Anmerkung.

Mehr Beyspiele unreiner quadratischen Gleichungen erhält man, wenn man die Algebra auf die Geometrie und Trigonometrie anwendet, welches nach Abhandlung dieser Wissenschaften im zweyten Theile geschehen soll. Jetzt noch etwas

Von

## Von unbestimmten Aufgaben, oder von der sogenannten Regel Coeci.

52.

Bey den bisher aufgelöseten Aufgaben ließ sich jede darin enthaltene Frage durch eine besondere Gleichung ausdrücken und bestimmt beantworten. Es giebt aber auch Aufgaben, die so beschaffen sind, daß sich nicht für alle und jede unbekannte Größen aus den angeführten Bedingungen Gleichungen herleiten lassen, und daß folglich manches unbestimmt bleiben muß. Man nennt daher diese Aufgaben unbestimmte Aufgaben, und weil es gemeiniglich bloß zufälliger Weise oder gleichsam blindlings geschiehet, wenn man unter oft unzähligen die wahre Antwort auf die darin vorgelegten Fragen trifft, so hat man das Verfahren, wodurch die hieher gehörigen Aufgabe berechnet werden, die Regel Coeci genennet.

53.

1te Aufgabe. Eine Größe N soll in zwey Theile getheilt werden, so daß, wenn man den einen Theil in a, den andern in b multiplicirt, die Summe der Producte gleich sey S.

Setzt man den einen Theil $= x$, den andern $= y$, so ist

I. $x + y = N$

F. $x = N - y$

II. $ax + by = S$

$x = N - y$

daher $aN - ay + by = S$

und $(b - a)y = S - aN$

F. $y = \frac{S - aN}{b - a}$.

1tes Beyspiel. Die Zahl 100 soll in zwey Theile getheilt werden, die so beschaffen sind, daß die Summe aus dem ersten Theil in 3 und dem zweyten Theil in 5 multiplicirt gleich sey 350.

Hier ist N = 100 a = 3, b = 5 und S = 350.

Folglich $y = \frac{350-3.100}{5-3} = \frac{350-300}{2} = \frac{50}{2} = 25.$

und $x = 100 - 25 = 75.$

Probe.

$$\left.\begin{array}{l} ax = 3 \cdot 75 = 225 \\ by = 5 \cdot 25 = 125 \end{array}\right\} = 350 = S.$$

2tes Beyspiel. Es will jemand für 700 rthlr. 22 Stück Vieh kaufen, nemlich Ochsen à 40, und Schweine à 10 rthlr. Wie viel wird er von jeder Art bekommen?

Hier ist N = 22, a = 10, b = 40 und S = 700.

Folglich $y = \frac{700-10.22}{40-10} = \frac{700-220}{30} = \frac{480}{30} =$

16 Stück Ochsen.

und x = 22 — 16 = 6 Stück Schweine.

Probe.

$$22\left\{\begin{array}{ll} 16 \text{ Stück Ochsen} & \text{à } 40 \text{ rthlr.} = 640 \\ 6 \text{ Stück Schweine} & \text{à } 10 \text{ rthlr.} = 60 \end{array}\right\} = 700 \text{ thl.}$$

3tes Beyspiel. Ein Goldschmidt braucht 21 Mark 13 löthiges Silber, wie viel muß er vom 8 und 15 löthigen dazu nehmen?

Hier ist N = 21, a = 8, b = 15 und S = 21.13 = 273.

Folglich $y = \frac{273-8.21}{15-8} = \frac{273-168}{7} = \frac{105}{7} =$ 15 Mark 15 löthig

und x = 21 — 15 = 6 Mark 8 löthiges.

Pro-

Probe.

15 Mark 15 löthiges = 225 Loth Silber
6 — 8 — = 48 — —

273 Loth = 21 Mk. à 13 L. S.

54.

2te Aufgabe. Eine Größe N in drey Theile zu theilen, so daß der erste Theil in den kleinsten Factor a plus dem andern Theil in den größern Factor b plus dem dritten Theil in den größten Factor c gleich sey S. Welches sind die drey Theile?

Man setze die drey Theile = x, y und z; so ist

I. $x + y + z = N.$

F. $x = N - y - z$

II. $ax + by + cz = S.$

$x = N - y - z$

F. $aN - ay - az + by + cz = S$

F. $by - ay + cz - az = S - aN$

F. $(b-a)y + (c-a)z = S - aN$

F. $y = \frac{S-(aN+(c-a)z)}{b-a}$

1tes Beyspiel. Die Zahl 150 soll in drey Theile getheilt werden, so daß das Product aus dem ersten Theil in 5 plus dem Product aus dem zweyten Theil in 10 plus dem Product aus dem dritten Theil in 15 multiplicirt gleich sey 1250.

Hier ist $N = 150$, $a = 5$, $b = 10$, $c = 15$ und $S = 1250$. Nimmt man nun nach Gutdünken $z = 25$,

so ist $y = \frac{1250-(5 \cdot 150+(15-5)25)}{10-5} = \frac{1250-(750+250)}{5}$

$= \frac{1250-1000}{5} = \frac{250}{5} = 50$ = dem 2ten Theil

folgl. $x = 150 - (50 + 25) = 150 - 75 = 75 =$ den ersten Theil.

Probe.

$$\left.\begin{array}{l} ax = 5 \cdot 75 = 375 \\ by = 10 \cdot 50 = 500 \\ cz = 15 \cdot 25 = 375 \end{array}\right\} = 1250 = S.$$

Hätte man aber den dritten Theil oder $z = 5$ genommen, so wäre

$$y = \frac{1250 - (5 \cdot 150 + (15 - 5)\,5)}{10 - 5} = \frac{1250 - (750 + 50)}{5}$$

$$= \frac{1250 - 800}{5} = \frac{450}{5} = 90 = \text{dem zweyten Theil.}$$

Folgl. $x = 150 - (90 + 5) = 150 - 95 = 55 =$ dem ersten Theil.

Probe.

$$\left.\begin{array}{l} ax = 5 \cdot 55 = 275 \\ by = 10 \cdot 90 = 900 \\ cz = 15 \cdot 5 = 75 \end{array}\right\} = 1250.$$

Oder hätte man den dritten Theil oder $z = 10$ genommen, so wäre

$$y = \frac{1250 - (750 + 100)}{10 - 5} = \frac{1250 - 850}{5} = \frac{400}{5} = 80.$$

Folglich $x = 150 - (80 + 10) = 150 - 90 = 60.$

## Anmerkung.

Alle drey Auflösungen beantworten die Frage völlig. Man sieht aber bald, daß noch viel mehr Antworten möglich sind, zumahl, wenn in der Aufgabe nicht bestimmt worden, daß die Theile in ganzen Zahlen gefunden werden sollen.

2tes Exempel. Ein Goldschmidt hat 9, 11 und 15 löthiges Silber, braucht aber 10 Mark 13 löthiges, wie viel muß er von jedem dazu nehmen?

Hier

Hier ist N = 10, a = 9, b = 11, c = 15. S = 10.13 = 130. Nimmt man nun z = 6; so ist

$$y = \frac{130 - (9.10 + (15-9)6)}{11-9} = \frac{130-(90+36)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$x = 10 - (2+6) = 2.$$

Probe.

ax = 9.2 = 18
by = 11.2 = 22
cz = 15.6 = 90
} = 130 = 10 Mark à 13 Loth Silber.

55.

3te Aufgabe. Eine Größe N in vier Theile zu theilen, daß die Summe aus dem Product des ersten Theils in a, und dem Product des zweyten Theils in b, und dem Product des dritten Theils in c, und dem Product des vierten Theils in d multiplicirt gleich sey der Größe S.

Die vier Theile mögen seyn v, x, y und z, so ist

I. $v + x + y + z = N$

F. $v = N - x - y - z$

II. $av + bx + cy + dz = S.$

$v = N - x - y - z$

daher $aN - ax - ay - az + bx + cy + dz = S$

und $bx - ax + cy - ay + dz - az = S - aN.$

oder $(b-a)x + (c-a)y + (d-a)z = S - aN$

daher $(b-a)x = S - (aN + (c-a)y + (d-a)z)$

F. $$x = \frac{S - (aN + (c-a)y + (d-a)z)}{b-a}$$

Hier müssen, wie man aus diesem Werth für x sieht, zwey Theile nemlich y und z nach Gutdünken gewählt werden, wobey man denn freylich dahin zu sehen hat, daß sie nicht zu groß ausfallen, wenn

anders keine negativen Größen zum Vorschein kommen sollen. Uebrigens sind hier unzählige Theilungen möglich, zumahl wenn es gleichviel ist, ob die Theile in gebrochnen oder ganzen Zahlen angegeben werden.

1tes Exempel. Ein Gewürzhändler kauft für 1200 rthlr. vielerley Gewürz und bezahlt von Nr. I. das Pfund mit 8 rthlr., von Nr. II. mit 6 rthlr. von Nr. III. mit 4 rthlr. und von Nr. IV. mit 2 rthlr. empfängt von jeder Sorte lauter ganze Pfunde, überhaupt aber 300 ℔. Wie viel Pfund hat er von jeder Sorten bekommen?

Hier ist $N=300, a=2, b=4, c=6, d=8$ und $S=1200$.

Setzt man nun $y=100$ und $z=10$, so ist

$$x = \frac{1200-(2\,.\,300+(6-2)\,100+(8-2)\,10)}{4-2}$$

$$x = \frac{1200-(600+400+60)}{2} = \frac{1200-1060}{2} = 70.$$

$$F.\,v = 300-(70+100+10) = 300-180 = 120.$$

Probe.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| von Nr. I. | 120 ℔ à 2 rthlr. | = | 240 rthlr. | } = 1200 thl. |
| von Nr. II. | 70 . à 4 . | = | 280 . | |
| von Nr. III. | 100 . à 6 . | = | 600 . | |
| von Nr. IV. | 10 . à 8 . | = | 80 . | |
| | 300 | | | |

Nimmt man $y=10$, $z=5$, so ist $v=20$ und $x=265$, u. nimt man $y=12$, $z=6$, so ist $v=24$ und $x=258$ u. s. w.

Ueberhaupt sind hier über 14700 Antworten in ganzen Zahlen möglich, und wäre in der Aufgabe nicht ausdrücklich der Umstand bemerkt, daß von jeder Sorte

Sorte lauter ganze Pfunde geliefert worden, so wären der Antworten unzählige.

2tes Exempel. Ein Goldschmidt hat 16, 18, 21 und 22 karathiges Gold, wie viel muß er von jedem zu 12 Mark 20 karathigem Golde nehmen?

Hier ist $N = 12$, $a = 16$, $b = 18$, $c = 21$, $d = 22$, $S = 240$.

Setzt man nun $y = 4$ und $z = 4$; so ist

$$x = \frac{240 - (16.12 + (21-16)4 + (22-16)4)}{18-16}$$

$$= \frac{240-(192+20+24)}{2} = \frac{240-236}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Folglich $v = 12 - (2+4+4) = 12 - 10 = 2$.

Probe.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 Mark | à 16 | Karath | = 32 | Kar. |
| 2 " | à 18 | — | = 36 | " |
| 4 " | à 21 | — | = 84 | " |
| 4 " | à 22 | — | = 88 | " |

$\Big\} = \frac{240}{20} = 12$ Mk.

56.

4te Aufgabe. Eine Größe N in zwey Theile zu theilen, von welchen sich der eine durch a, der andere durch b theilen lasse.

Setzt man den einen Quotienten $= x$, den andern $= y$, so muß $N = ax + by$ seyn

und $ax = N - by$

F. $x = \frac{N - by}{a}$

Es sey die Zahl oder $N = 50$, $a = 5$, $b = 10$. Nimmt man $y = 4$,

so ist $x = \frac{50 - 10.4}{5} = \frac{50-40}{6} = \frac{10}{5} = 2$

Folglich der eine Theil $= 5.2 = 10$
der andere — $= 10.4 = 40$ $\Big\} = 50$.

Nimmt

Nimmt man $y = 3$,

so ist $x = \frac{50 - 10.3}{5} = \frac{50-30}{5} = \frac{20}{5} = 4$

Folglich der eine Theil $= 5.4 = 20$
der andere Th. $= 10.3 = 30$ $\Big\} = 50.$

Nimmt man $y = 2$,

so ist $x = \frac{50 - 10.2}{5} = \frac{50-20}{5} = \frac{30}{5} = 6.$

Folglich die eine Zahl $= 5.6 = 30$
die andere — $= 10.2 = 20$ $\Big\} = 50.$

Nimmt man $y = 1$, so ist

$x = \frac{50-10.1}{5} = \frac{50-10}{5} = \frac{40}{5} = 8.$

Folglich die eine Zahl $= 5.8 = 40$
die andere — $= 10.1 = 10$ $\Big\} = 50.$

57.

5te Aufgabe. Was sind das für zwey Größen deren Summe und Product zusammen genommen gleich sey der Größe S.

Setzt man die eine Größe $= x$, die andere $= y$,

so ist ihre Summe $= x + y$

ihr Product $= xy$

Folglich $x + y + xy = S$

und $x + xy = S - y$

F. $x = \frac{S - y}{1 + y}$.

Es sey z. B. die Summe und das Product zweyer Zahlen zusammen genommen gleich 100, welches sind die beyden Zahlen?

Setzt man $y = 1$, so ist $x = \frac{100 - 1}{1 + 1} = \frac{99}{2} = 49\frac{1}{2}$

Nimmt man $y = 2$, so ist $x = \frac{100 - 2}{2 + 1} = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$.

Nimmt

Nimmt man $y = 3$, so ist $x = \frac{100-3}{1+3} = \frac{97}{4} = 24\frac{1}{4}$.

Nimmt man $y = 99$, so ist $x = \frac{100-99}{1+99} = \frac{1}{100}$.

## Probe.

$1 + 49\frac{1}{2} = 50\frac{1}{2}$
$1 \cdot 49\frac{1}{2} = 49\frac{1}{2}$
100.

$2 + 32\frac{2}{3} = 34\frac{2}{3}$
$2 \cdot 32\frac{2}{3} = 65\frac{1}{3}$
100.

$3 + 24\frac{1}{4} = 27\frac{1}{4}$
$3 \cdot 24\frac{1}{4} = 72\frac{3}{4}$
100.

$99 + \frac{1}{100} = 99\frac{1}{100}$
$99 \cdot \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$
100.

Man sieht hieraus, daß sich die Frage auf verschiedene Art beantworten lasse; denn es sind allein 99 Antworten möglich, wenn die eine von den beyden Zahlen eine ganze Zahl ist.

# Druckfehler.

Seite 3 Zeile 14 ist das Wort (numerus) ein Zusatz des Setzers.

99 2 von unten, lese man dem anstatt den.

101 20 lese man entgegengesetzten anstatt entgegengesetzte.

105 9 l. m. vom anstatt von.

107 18 l. m. hätte anstatt hat.

114 2 l. m. $\frac{27}{100}$ anstatt $\frac{27}{000}$.

120 12 l. m. $=0{,}21$ anst. $-0{,}21$.

121 13 l. m. $\frac{8}{10000}$ anst. $\frac{8}{1000}$.

15 l. m. 0,00000192 anst. 000000192.

126 10 l. m. 0,81 anst. 8,1.

128 9 l. m. lateinischen anst. Lateinischen.

137 30 l. m. dann anst. denn.

Die übrigen Fehler sollen beym zweyten Theil angemerkt werden.

, Seite 29 § 18, 19. Tk. I.

| 2 | 3 | 7 | 8 | 9 | 1 | 5 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 02 | 03 | 07 | 08 | 09 | 01 | 05 | 00 | 04 |
| 04 | 06 | 14 | 16 | 18 | 02 | 10 | 00 | 08 |
| 06 | 09 | 21 | 24 | 27 | 03 | 15 | 00 | 12 |
| 08 | 12 | 28 | 32 | 36 | 04 | 20 | 00 | 16 |
| 10 | 15 | 35 | 40 | 45 | 05 | 25 | 00 | 20 |
| 12 | 18 | 42 | 48 | 54 | 06 | 30 | 00 | 24 |
| 14 | 21 | 49 | 56 | 63 | 07 | 35 | 00 | 28 |
| 16 | 24 | 56 | 64 | 72 | 08 | 40 | 00 | 32 |
| 18 | 27 | 63 | 72 | 81 | 09 | 45 | 00 | 36 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hildebrand, Joachim Ernst Albrecht,

Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie ...

Berlin 1793

Math.u. 72
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593929-7
VD18 14601753-001